

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.
- b) Dresser le tableau de variation de f .
- c) Déterminer les points d'intersections de C_f et l'axe des abscisses et de C_f et l'axe des ordonnées.
- d) Montrer que la droite $D : x = -1$ est un axe de symétrie de C_f .
- 2) a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point d'abscisse -2 .
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat graphiquement.
- c) Construire T et C_f dans un même repère.
- 3) Soit la droite $D' : y = -2x + m$ où m est un paramètre réel, déterminer en fonction de m le nombre de points d'intersection de C_f et D' .

Exercice 2

Soit f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^4 + 2x^2 - 8$ et $g(x) = x^3 - 2x$.

On désigne par C_f et C_g les courbes représentatives de f et g avec $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$ et $\|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$.

- 1) Etudier les variations de f et g .
- 2) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_f et C_g avec l'axe des abscisses.
- 3) Construire C_f et C_g .

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c étant des réels et soit C_f sa courbe représentative. On note $S(-2, -3)$ le sommet de C_f . La courbe C_f admet au point d'abscisse -1 une tangente dont une équation cartésienne est : $y = 2x$.

- 1) Déterminer les réels a, b et c .
- 2) On suppose dans la suite que : $f(x) = x^2 + 4x + 1$.
 - a) Dresser le tableau de variation de f .
 - b) Montrer que la droite $D : x = -2$ est un axe de symétrie de C_f .
 - c) Construire C_f .
- 3) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x^2 + 4|x| + 1$ et soit C_g sa courbe représentative.
 - a) Montrer que la fonction g est paire.
 - b) Déduire de C_f la représentation graphique de C_g .
 - c) Dresser le tableau de variation de g .

Exercice 4

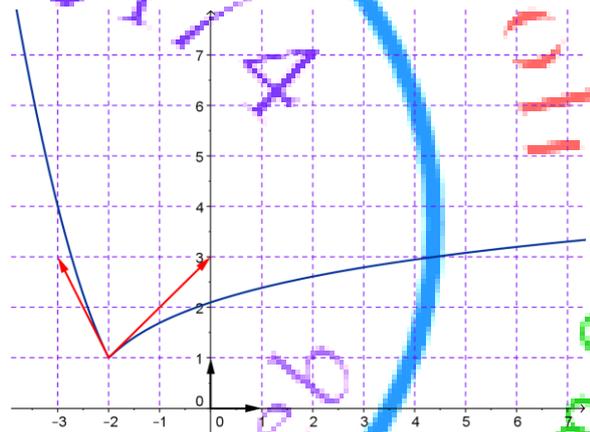
Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont des réels et soit C_f sa courbe représentative.

- Déterminer les réels a , b et c pour que f admette des extrema en -1 et en 1 et que la tangente à C_f au point d'abscisse 0 passe par le point $A(-1, 4)$.
- On suppose dans la suite que : $f(x) = x^3 - 3x + 1$.
 - Dresser le tableau de variation de f .
 - Préciser les extrema de f .
- Montrer que le point $I(0, 1)$ est un centre de symétrie de C_f .
 - Montrer que le point $I(0, 1)$ est un point d'inflexion de C_f .
- Déterminer les abscisses des points de C_f où la tangente en ces points est parallèle à la droite $\Delta : 9x - y + 2 = 0$.
- Tracer C_f .

Exercice 5

On donne ci-contre la courbe d'une fonction f .

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Déterminer $f(-2)$
 - $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{f(x)-1}{x+2}$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x)-1}{x+2}$
 - Déterminer le domaine de dérivabilité de f .
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$



Exercice 6

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + 3x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
 et soit C_f sa courbe représentative.

- Etudier la continuité de f en 1 .
 - Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
- Etudier la dérivabilité de f en 1 .
 - Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ et déterminer sa fonction dérivée.
 - Dresser le tableau de variation de f .
- Existe-t-il un point A de la courbe C_f où la tangente en A est parallèle à la droite $\Delta : y = -2x$.
- Tracer C_f .

Exercice 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$ et C_f sa courbe représentative.

- Déterminer le domaine de définition D_f de f .

- 2) Déterminer trois réels a, b et c tels que : pour tout $x \in D_f, f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$
- 3) a) Etudier les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction g définie sur D_f par : $g(x) = f(x) - x + 1$.
b) Que peut-on en conclure pour C_f et la droite $\Delta : y = x - 1$.
c) Etudier la position de C_f par rapport à Δ .
- 4) Montrer que le point $I(-1, -2)$ est un centre de symétrie de C_f .
- 5) a) Etudier les variations de f .
b) Tracer C_f .
- 6) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{x^2+3}{|x|+1}$
a) Etudier la parité de h .
b) Dédire de C_f la représentation graphique de C_h .

Exercice 8

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^2-4x-1}{x-2}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Déterminer D_f le domaine de définition de f .
b) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
- 2) Soient trois réels a, b et c tels que : pour tout $x \in D_f, f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$
a) Calculer de deux manières $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ en déduire a .
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)f(x)$ en déduire c .
c) Calculer $f(0)$ en déduire b .
d) Montrer que la droite $\Delta: y = 2x$ est une asymptote à C_f .
- 3) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) Montrer que le point $I(2, 4)$ est un centre de symétrie de C_f .
- 5) Etudier la position de C_f par rapport à Δ .
- 6) Tracer Δ et C_f .

Exercice 9

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 4x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) Montrer que f est définie sur $]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$.
- 2) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$.
c) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0 et à droite en 4.
d) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 3) Montrer que la droite $\Delta: x = 2$ est un axe de symétrie de C_f .
- 4) Montrer que les droites $D_1; y = 2x - 4$ et $D_2; y = -2x + 4$ sont des asymptotes à C_f respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 5) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$ et dresser le tableau de variation de f .

- 6) Tracer Δ , D_1 , D_2 et C_f .
- 7) soit la fonction g définie par $g(x) = f(|x| + 4)$
 - a) Montrer que g est définie sur \mathbb{R} .
 - b) Montrer que la fonction g est paire.
 - c) Explique comment peut-on déduire C_g à partir de C_f . Tracer C_g .

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par : $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$.
- 2) Montrer que la droite Δ ; $y = x - 1$ est une asymptote à C_f .
- 3) Montrer que le point $I(-2, -3)$ est un centre de symétrie de C_f .
- 4) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
b) Dresser le tableau de variation de f .
- 5) Tracer Δ et C_f .
- 6) Discuter suivant le paramètre réel m le nombre de solution de l'équation : $x^2 + x(1-m) - 1 = 2m$.

Exercice 11

I) On donne ci-contre la courbe d'une fonction g

Définie sur $] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$ par :

$$g(x) = 2 - x^2\sqrt{x^2 - 1}$$

- 1) Calculer $g(-\sqrt{2})$ et $g(\sqrt{2})$.
- 2) a) Déterminer graphiquement $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

b) Déterminer graphiquement $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{g(x)-2}{x+1}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x)+2}{x-1}$

c) Déterminer graphiquement le signe de $g(x)$ pour tout $x \in] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$

II) Soit f la fonction définie sur $] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en -1 et à droite en 1 . Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

c) Montrer que les droites D_1 ; $y = -x + 3$ et D_2 ; $y = -x - 1$ sont des asymptote à C_f respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

b) Dresser le tableau de variation de f .

3) Montrer que le point $I(0, 1)$ est un centre de symétrie de C_f . 4) Construire D_1 , D_2 et C_f .

