Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Déterminer les points d'intersections de C_f et l'axe des abscisses et de C_f et l'axe des ordonnées.

d) Montrer que la droite $D : x = -1$ est un axe de symétrie de C_f.

2) a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point d'abscisse -2.

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat graphiquement.

c) Construire T et C_f dans un même repère.

3) Soit la droite $D' : y = -2x + m$ où m est un paramètre réel, déterminer en fonction de m le nombre de points d'intersection de C_f et D'.

Exercice 2

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 + 2x^2 - 8$ et $g(x) = x^3 - 2x$.

On désigne par C_f et C_g les courbes représentatives de f et g avec $\|\vec{\imath}\| = 2\ cm$ et $\|\vec{\jmath}\| = 1\ cm$.

1) Etudier les variations de f et g.

2) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_f et C_g avec l'axe des abscisses.

3) Construire C_f et C_g.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c étant des réels et soit C_f sa courbe représentative. On note $S(-2, -3)$ le sommet de C_f. La courbe C_f admet au point d'abscisse -1 une tangente dont une équation cartésienne est : $y = 2x$.

1) Déterminer les réels a, b et c.

2) On suppose dans la suite que : $f(x) = x^2 + 4x + 1$.

a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que la droite $D : x = -2$ est un axe de symétrie de C_f.

c) Construire C_f.

3) Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = x^2 + 4|x| + 1$ et soit C_g sa courbe représentative.

a) Montrer que la fonction g est paire.

b) Déduire de C_f la représentation graphique de C_g.

c) Dresser le tableau de variation de g.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, où a b et c sont des réels et soit C_f sa courbe représentative.

1) Déterminer les réels a b et c pour que f admette des extrema en -1 et en 1 et que la tangente à C_f au point d'abscisse 0 passe par le point $A(-1\,,4)$.

2) On suppose dans la suite que : $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

   a) Dresser le tableau de variation de f.

   b) Préciser les extrema de f.

3) a) Montrer que le point $I(0\,,1)$ est un centre de symétrie de C_f.

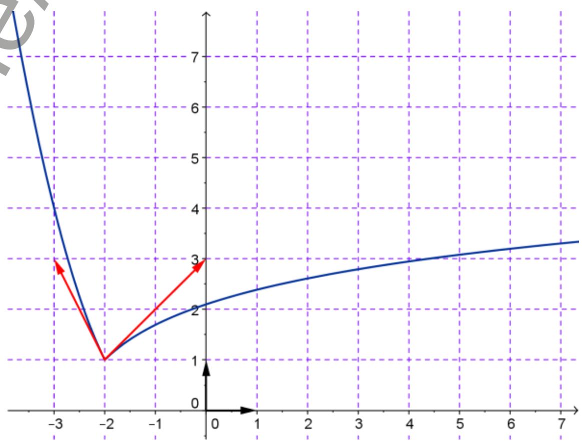
   b) Montrer que le point $I(0\,,1)$ est un point d'inflexion de C_f.

4) Déterminer les abscisses des points de C_f où la tangente en ces points est parallèle à la droite $\Delta : 9x - y + 2 = 0$.

5) Tracer C_f.

Exercice 5

On donne ci-contre la courbe d'une fonction f.



1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) a) Déterminer $f(-2)$

   b) $\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{f(x)-1}{x+2}$ et $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{f(x)-1}{x+2}$

   c) Déterminer le domaine de dérivabilité de f.

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Exercice 6

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = -x^2 + 3x - 2 & si \quad x \le 1 \\ f(x) = \frac{x-1}{x+1} & si \quad x > 1 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Etudier la continuité de f en 1.

   b) Montrer que f et continue sur $\mathbb{R}$.

2) a) Etudier la dérivabilité de f en 1.

   b) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty\,,1[$ et $]1\,,+\infty[$ et déterminer sa fonction dérivé.

   c) Dresser le tableau de variation de f.

3) Existe-t-il un point A de la courbe C_f où la tangente en A est parallèle à la droite Δ: $y = -2x$.

4) Tracer C_f.

Exercice 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$ et C_f sa courbe représentative.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2) Déterminer trois réels a, b et c tels que : pour tout $x \in D_f$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

3) a) Etudier les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction g définie sur D_f par : $g(x) = f(x) - x + 1$.

b) Que peut-on en conclure pour C_f et la droite $\Delta : y = x - 1$.

c) Etudier la position de C_f par rapport à Δ.

4) Montrer que le point $I(-1\,,-2)$ est un centre de symétrie de C_f.

5) **a)** Etudier les variations de f.

b) Tracer C_f.

6) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{x^2+3}{|x|+1}$

a) Etudier la parité de h.

b) Déduire de C_f la représentation graphique de C_h.

Exercice 8

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^2-4x-1}{x-2}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) **a)** Déterminer D_f le domaine de définition de f.

b) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

2) Soient trois réels a, b et c tels que : pour tout $x \in D_f$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

a) Calculer de deux manière $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ en déduire a.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)f(x)$ en déduire c.

c) Calculer $f(0)$ en déduire b.

d) Montrer que la droite Δ: $y = 2x$ est une asymptote à C_f.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Montrer que le point $I(2\,,4)$ est un centre de symétrie de C_f.

5) Etudier la position de C_f par rapport à Δ.

6) Tracer Δ et C_f.

Exercice 9

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 4x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Montrer que f est définie sur $]-\infty\,,0] \cup [4\,,+\infty[$

2) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty\,,0[\cup]4\,,+\infty[$.

c) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0 et à droite en 4.

d) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3) Montrer que la droite Δ: $x = 2$ est un axe de symétrie de C_f.

4) Montrer que les droites D_1; $y = 2x - 4$ et D_2; $y = -2x + 4$ sont des asymptote à C_f respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.

5) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty\,,0[\cup]4\,,+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f.

6) Tracer Δ, D_1, D_2 et C_f.

7) soit la fonction g définie par $g(x) = f(|x| + 4)$

a) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction g est paire.

c) Explique comment peut-on déduire C_g à partir de C_f. Tracer C_g.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par : $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$.

2) Montrer que la droite $\Delta\,; y = x - 1$ est une asymptote à C_f.

3) Montrer que le point $I(-2\,,-3)$ est un centre de symétrie de C_f.

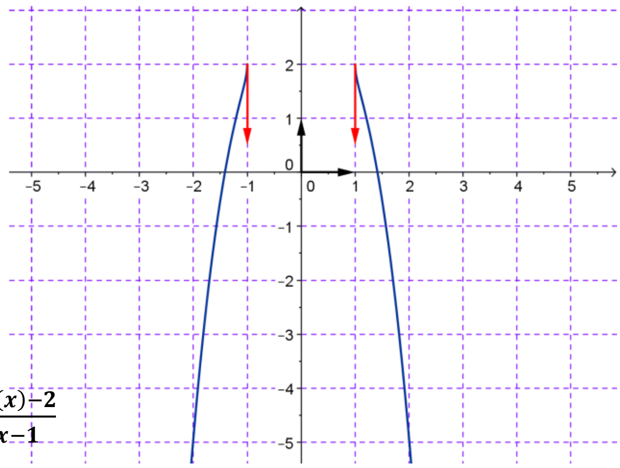
4) **a)** Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

5) Tracer Δ et C_f.

6) Discuter suivant le paramètre réel m le nombre de solution de l'équation : $x^2 + x(1-m) - 1 = 2m$.

Exercice 11



I) On donne ci-contre la courbe d'une fonction g

Définie sur $]-\infty\,,-1] \cup [1\,,+\infty[$ par :

$g(x) = 2 - x^2\sqrt{x^2-1}$

1) Calculer $g(-\sqrt{2})$ et $g(\sqrt{2})$.

2) **a)** Déterminer graphiquement $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

b) Déterminer graphiquement $\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{g(x)-2}{x+1}$ et $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{g(x)-2}{x-1}$

c) Déterminer graphiquement le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]-\infty\,,-1] \cup [1\,,+\infty[$

II) Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,,-1] \cup [1\,,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) **a)** Etudier la dérivabilité de f à gauche en -1 et à droite en 1. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

c) Montrer que les droites $D_1;\ y = -x + 3$ et $D_2;\ y = -x - 1$ sont des asymptote à C_f respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) **a)** Montrer que pour tout $x \in]-\infty\,,-1[\cup]1\,,+\infty[\,;\ f'(x) = \frac{g(x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que le point $I(0\,,1)$ est un centre de symétrie de C_f. 4) Construire D_1, D_2 et C_f.