Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Déterminer les points d'intersections de C_f et l'axe des abscisses et de C_f et l'axe des ordonnées.

c) Montrer que la droite $D : x = -1$ est un axe de symétrie de C_f.

2) a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point d'abscisse -2.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat graphiquement.

b) Construire T et C_f dans un même repère.

3) Soit la droite $D' : y = -2x + m$ où m est un paramètre réel, déterminer en fonction de m le nombre de points d'intersection de C_f et D'.

4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2|x| - 3$ et soit C_g sa courbe représentative.

a) Montrer que la fonction g est paire.

b) Déduire de C_f la représentation graphique de C_g.

c) Dresser le tableau de variation de g.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c étant des réels et soit C_f sa courbe représentative. On note $S(-2, -3)$ le sommet de C_f. La courbe C_f admet au point d'abscisse -1 une tangente dont une équation cartésienne est : $y = 2x$.

1) Déterminer les réels a, b et c.

2) On suppose dans la suite que : $f(x) = x^2 + 4x + 1$.

a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que la droite $D : x = -2$ est un axe de symétrie de C_f.

c) Construire C_f.

3) Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = x^2 + 4|x| + 1$ et soit C_g sa courbe représentative.

a) Montrer que la fonction g est paire.

b) Déduire de C_f la représentation graphique de C_g.

c) Dresser le tableau de variation de g.

Exercice 3

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$ et soit C_f sa courbe représentative

1) a) Montrer que f est dérivable sur IR puis calculer $f'(x)$ $\forall x \in IR$

b) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Montrer que C_f admet un point d'inflexion I

3) Tracer C_f

4) Soit la droite $\Delta_m : y = mx + 9$

Etudier suivant les valeurs de le nombre de d'intersection de C_f et Δ_m

Exercice 4

1) On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $g(x) = \frac{ax^2+4x+b}{(x-1)^2}$ où a et b sont deux reels. La courbe C_g de g coupe l'axe $(O\ ,\ \vec{j}\,)$ en un point $A(0\ ,-3)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$	-2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-2

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

b) Déterminer alors les réels a et b

c) Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ on a : $g(x) < 0$

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \frac{2x^2-3x}{x-1}$ et soit C_f sa courbe représentative

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ on a : $f'(x) = -g(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f

3) a) Montrer que la droite Δ: $y = 2x - 1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$ et $-\infty$

b) Etudier la position relative de Δ et C_f

c) Montrer que le point $I(1\ ,1)$ est un centre de symétrie de C_f

d) Tracer C_f et Δ

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur IR par $\begin{cases} f(x) = \frac{2x+2}{1-x} & si\ x \leq -1 \\ f(x) = x^2 + 3x + 2 & si\ x > -1 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe représentative

1) Montrer que $f$est continue en -1

2) a) Etudier la dérivabilité de f en -1

b) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point d'abscisse -1

3) a) Calculer $f'(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f

4) Tracer C_f.

5) Existe-t-ils des points des C_f où la tangente à C_f est parallèle à la droite Δ: $y = \frac{1}{4}x - 1$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$, où a et b sont des réels.

1) Déterminer les réels a et b pour que f admette un extremum égal à -6 en $x_0 = 2$.

2) On suppose dans la suite que : $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 2$.

a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Préciser les extrema de f.

3) Déterminer les abscisses des points de C_f où la tangente en ces points est parallèle à la droite $\Delta : 4x + y - 1 = 0$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = -x^2 + 3x - 2 & si \quad x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x-1}{x+1} & si \quad x > 1 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Etudier la continuité de f en 1.

b) Montrer que f et continue sur $\mathbb{R}$.

2) a) Etudier la dérivabilité de f en 1.

b) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty\ ,1[$ et $]1\ ,+\infty[$ et déterminer sa fonction dérivé.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3) Déterminer le point A de la courbe C_f où la tangente en A est parallèle à la droite Δ: $y = -2x + 3$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$ On désigne par C_f la courbe représentative de f.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2) Déterminer trois réels a, b et c tels que : pour tout $x \in D_f$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

3) a) Etudier les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction g définie sur D_f par : $g(x) = f(x) - (x - 1)$.

b) Que peut-on en conclure pour C_f et la droite $\Delta : y = x - 1$.

c) Etudier la position de C_f par rapport à Δ.

4) Montrer que le point $I(-1\ ,-2)$ est un centre de symétrie de C_f.

5) a) Etudier les variations de f.

b) Tracer C_f.

6) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{x^2+3}{|x|+1}$

a) Etudier la parité de h.

b) Déduire de C_f la représentation graphique de C_h.

Exercice 9

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$ et soit C_f sa courbe représentative

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et interpreter le resultant graphiquement.

2) a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \neq 1$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

b) En déduire que la droite D: $y = x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $(-\infty)$ et au voisinage de $(+\infty)$

c) Etudier la position de C_f par rapport à D

3) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et que $f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Montrer que le point $I(1\,,1)$ est un centre de symétrie de C_f.

5) Tracer C_f et ses asymptotes.

Exercice 10

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x-1}$ On désigne par C_f la courbe représentative de f.

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

b) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition

2) Dresser le tableau de variations de f.

3) a) Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = x + 3 + \frac{1}{x+1}$

b) En déduire que Δ: $y = x + 3$ est une asymptote oblique à C_f.

c) Déterminer l'autre asymptote D à C_f.

4) a) Etudier la position relative de C_f et Δ

b) Montrer que le point $I(1\,,4)$ est un centre de symétrie de C_f.

5) Tracer D ; Δ et C_f.

6) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{x^2+2|x|-2}{|x|-1}$ On désigne par C_g sa courbe représentative

a) Déterminer le domaine de définition D_g de g.

b) Etudier la parité de g.

c) En déduire la construction de C_g à partir de C_f

Exercice 11

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{4x-4}{x^2-2x+2}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

b) Déterminer les limites aux bornes de D_f et interpréter les résultats graphiquement.

2) Dresser le tableau de variations de f.

3) a) Montrer que le point $I(1\,,0)$ est un centre de symétrie de C_f.

b) Donner une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point I

4) Etudier la position de C_f par rapport à T. Puis tracer T et C_f.

5) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre des solutions de l'équation $f(x) = m$

Exercice 12

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{-x^2-x+1}{x-1}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$; $f'(x) = \frac{-x^2+2x}{(x-1)^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ l'équation $f(x) = 0$.

d) En déduire du tableau de variations de f le signe de f.

3) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ on a : $f(x) = -x - 2 - \frac{1}{x-1}$

b) En déduire que Δ: $y = -x - 2$ est une asymptote oblique à C_f.

c) Déterminer l'autre asymptote à C_f.

4) Déterminer les abscisses des points de C_f où la tangente est perpendiculaire à la droite $D : y = -\frac{1}{6}x$

Exercice 13

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2-3x+3}{x-2}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

c) Interpréter graphiquement le résultat

2) a) Déterminer trois réels a ,b et c tel que $\forall x \in D_f$; $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

b) Montrer que Δ: $y = x - 1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

3) a) Montre que f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$; $f'(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Montrer que $I(2\ ,1)$ est un centre de symétrie de C_f.

b) Etudier la position de C_f par rapport à Δ. Puis construire C_f et ses asymptotes Δ et Δ'

Exercice 14

1) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax^2-4x++\beta}{x-1}$ $(\alpha\ ,\beta) \in IR^2$ et soit C_f sa courbe représentative

a) Déterminer le domaine de définition de f

b) Calculer $\forall x \in D_f$ et en fonction de α et β $f'(x)$

c) Déterminer les réels α et β pour lesquels f admette un extremum égal à 2 en 3

2) On prend par la suite $\alpha = 1$ et $\beta = 7$

a) Dresser le tableau de variation de f

b) Préciser la nature des extrema de f.

c) Montrer que le point $I(1\ ,-2)$ est un centre de symétrie de C_f.

3) a) Déterminer trois réels a ,b et c tel que $\forall x \in D_f$; $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

b) Montrer que Δ: $y = x - 3$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

c) Etudier la position de C_f par rapport à Δ.

4) Tracer Δ et C_f.

5) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre des solutions de l'équation $f(x) = m$