ESPACE $4^{ème}$ MATHEMATIQUES

Dans tous les exercices l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Exercice 1

On considère les points $A(1, 0, 1)$, $B(2, 0, 0)$ et $C(0, 2, -1)$

1) Montrer que A, B, et C ne sont pas alignés

2) On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

   a) Calculer les composantes du vecteur $\vec{u}$

   b) Donner une équation cartésienne du plan $P = (ABC)$

   c) Calculer l'aire du triangle ABC

3) a) Soit le point $D(-1, -3, -1)$. Montrer que $D \notin P$

   b) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ perpendiculaire à P et passant par D

   c) Montrer que A est le projeté orthogonal de D sur P

4) a) Calculer $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$

   b) En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$

Exercice 2

On considère les points $A(1, 0, 0)$, $B(1, -1, 1)$ et $C(-2, 0, 1)$

1) a) On pose $\vec{U} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

   a) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{U}$

   b) Donner une équation cartésienne du plan $P = (ABC)$

   c) Calculer l'aire du triangle ABC

2) Soit le point $G(x, y, z)$ tel que $2\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

   a) Déterminer les coordonnées du point G

   b) On pose : $\Delta = \{M(x, y, z) \text{ tel que : } 2\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MC} = \vec{0}\ \}$

Montrer que Δ est une droite que l'on caractérisera

3) Soit le plan $Q : y - z + 2 = 0$

   a) Montrer que P et Q sont perpendiculaires

   b) Soit $\Delta' = P \cap Q$. Donner une représentation paramétrique de Δ'

Exercice 3

On considère les points $A(1, 2, 2)$, $B(3, 2, 1)$ et $C(1, 3, 3)$

1) a) Montrer que les points A, B, et C ne sont pas alignés

   b) Donner un vecteur normal au plan P contenant les points A, B et C

   c) En déduire une équation cartésienne du plan P

d) Déterminer une représentation paramétriques de la droite $D\perp P$ et passant par le point A

2) On considère les plans $P_1 : x-2y+2z-1=0$ et $P_2 : x-3y+2z+2=0$

a) Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants

b) Soit Δ la droite d'intersection des plans P_1 et P_2 ; Montrer que le point C appartient à la droite Δ et que le vecteur $\vec{U}=2\vec{i}-\vec{k}$ est un vecteur directeur de Δ

3) Calculer la distance du point A à la droite Δ

4) On désigne par Q le plan perpendiculaire à la droite Δ et passant par le point A

a) Déterminer une équation cartésienne du plan Q

b) Montrer que le point $H(\frac{7}{5},3,\frac{14}{5})$ est le projeté orthogonal du point A sur Δ

c) Retrouver la distance du point A à la droite Δ

Exercice 4

Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de ξ tel que $x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+2=0$

1) a) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre I et le rayon R

b) Déterminer l'intersection de la sphère S avec le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$

2) On désigne par h l'homothétie de centre $\Omega(1,1,0)$ et de rapport $k=-\frac{3}{2}$

a) Déterminer le centre I' et le rayon R' de la sphère S' l'image de S par h

b) Déterminer l'intersection de la sphère S' avec le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice 5

On considère $ABCE$ le tétraèdre tel que $A(1,0,2)$, $B(0,0,1)$ $C(0,-1,3)$ et $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

1) a) Vérifier que E a pour coordonnées $(0,2,3)$

b) Calculer le volume du tétraèdre $ABCE$

2) a) Soit P le plan d'équation : $x-2y-z+5=0$. Montrer P que est parallèle au plan (ABC)

b) Soit K le point défini par $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$. Calculer les coordonnées du point K et vérifier que $K\in P$

3) Soit h l'homothétie de centre E quiu transforme le point C en K

a) Déterminer le rapport de h

b) Le plan P coupe les arêtes $[EA]$ et $[EB]$ respectivement en I et J

Calculer le volume du tétraèdre $EIJK$

Exercice 6

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(A,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit $ABCDEFGH$ le cube tel que : $\overrightarrow{AB}=6\vec{\imath}$, $\overrightarrow{AD}=6\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{AE}=6\vec{k}$.

On désigne par P le plan (ACH) et par Q le plan (EGB).

1) **a**) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AH}$.

b) En déduire une équation du plan P.

c) Montrer que les plans P et Q sont parallèles et donner une équation d u plan Q.

2) Soit S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z = 0$.

a) Déterminer le rayon de S et les coordonnées de son centre I.

b) Soit J le projeté orthogonal de A sur le plan Q. Montrer que $[AJ]$ est un diamètre de S.

c) Montrer que la sphère S est tangente à chacun des deux plans P et Q.

3) Soit t la translation de vecteur $\vec{U} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

a) Soit A' et J' les images respectifs de A et J par . Déterminer les coordonnées de A' et J'.

b) Déterminer S' l'image de la sphère S par t.

c) Montrer que S' est tangente aux deux plans P et Q et déterminer leurs points de contact.

<u>Exercice 7</u>

On considère les points $A(1,-1,2)$ et $B(-1,1,-2)$

1) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB)

2) Soit P le plan passant par A et perpendiculaire à la droite (AB) et le plan $Q : x - y + 2z + 6 = 0$

a) Donner une équation cartésienne du plan P

b) Vérifier que le plan Q passe par le point B et est parallèle au plan P

3) On considère la sphère S tangente en B au plan Q et dont l'intersection avec le plan P est le cercle de centre A et de rayon $2\sqrt{3}$

On désigne par I le centre de la sphère S et par (a, b, c) les coordonnées de I

a) Montrer que le point I appartient à la droite (AB)

b) En déduire que $b = -a$ et $c = 2a$

c) Montre que $IB^2 - IA^2 = 12$, et en déduire que $a - b + 2c = 3$

d) Déterminer alors les coordonnées du point I et écrire une équation cartésienne de S

<u>Exercice 8</u>

On considère les points $A(-1,1,3)$, $B(2,1,0)$ et $C(2,-1,2)$

1) a) Montrer que les ponts A, B et C ne sont pas alignés

b) On note P le plan (ABC) . Montrer qu'une équation cartésienne de P et $x + y + z - 3 = 0$

2) a) Soit Q le plan médiateur de $[AB]$ Montrer qu'une équation cartésienne de Q et $x - z + 1 = 0$

b) On note D la droite d'intersection de P et Q. Trouver une équation cartésienne de D

3) Soit $S=\left\{M(x\,,y\,,z)\in \xi \text{ tel que } MB^2+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BC}=0\right\}$

a) Vérifier que $M(x\,,y\,,z)\in S \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=0$

b) En déduire que S est une sphère de centre $I(2\,,0\,,1)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$

c) Montrer que le plan Q est tangent à S en un point H dont on déterminera les coordonnées

4) Soit $S_m=\left\{M(x\,,y\,,z)\in \xi \text{ tel que } x^2+y^2+z^2-2mx-2my-2(m+3)z+5m-10=0\right\}$; $m\in$ IR

a) Montrer que S_m est une sphère de centre $\Omega_m(m\,,m\,,m+3)$ et dont on déterminera le rayon R_m

b) Que décrit le point Ω_m lorsque m décrit IR

c) Discuter selon m la position relative de S_m et P

__Exercice 9__

On considère les points $A(2\,,-3\,,-1)$, $B(1\,,0\,,2)$ et $C(0\,,1\,,3)$

1) a) Montrer que les ponts A, B et C ne sont pas alignés

b) Ecrire une équation cartésienne du plan P passant par les points A, B et C

2) Pour tout réel t de l'intervalle $[-\pi\,,\pi[$, on considère l'ensemble S_t des points $M(x\,,y\,,z)$ de l'espace vérifiant l'équation : $x^2+y^2+z^2-2tx-2y\sin t+2z+t^2+\sin^2 t-1=0$

Montrer que S_t est une sphère dont on précisera le centre et le rayon

3) a) Etudier suivant les valeurs de t l'intersection de la sphère S_t et du plan P

b) Dans le cas ou le plan P est tangent à la sphère S_t, déterminer les coordonnées du point de contacte H

__Exercice 10__

On considère les points $A(1,2,-1)$ et $B(2,1,1)$

1) Déterminer une équation cartésienne du plan Q passant par A et perpendiculaire à la droite (AB)

2) Soit P_m le plan d'équation : $x+y+m-3=0$ ou m est un paramètre réel

a) Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan P_m

b) Pour quelle valeur de m la droite (AB) est incluse dans le plan P_m

c) Montrer que le plan P_m est perpendiculaire au plan Q

3) Soit B' le projeté orthogonal de B sur P_m et A' le projeté orthogonal de A sur P_m

Déterminer les valeurs de m pour que ABB'A' soit un carré

Exercice 11

Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de ξ tel que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0$ et le point $B(0, -1, 1)$

1) Montrer que S est une sphère de centre $A(1, 0, 0)$ et de rayon 2

2) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB)

   b) Déterminer une équation cartésienne du plan P perpendiculaire à (AB) en B

3) Montrer que l'intersection de S et P est un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon

4) Soit le plan $P_m : mx + my - z + 2 = 0$; $m \in IR$

   a) Etudier suivant les valeurs de m la position relative de S et P_m

   b) Montrer que le plan P_0 est tangent à la sphère S et déterminer les coordonnées du point de contacte C

Exercice 12

Soient A, B et C trois point alignés de l'espace et les points $I = A * B$ et $J = A * C$; P et Q étant les plans médiateurs respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$

1) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $k \neq 1$

   a) Montrer que J est l'image de I par h

   b) Montrer alors que Q est l'image de P par h

2) La droite Δ passant par A et différente de la droite (AB) perce P en E

   a) Montrer que Δ perce Q

   b) On suppose que Δ perce Q en F, montre que $F = h(E)$

   c) En déduire que $(BE)//(CF)$

Exercice 13

On donne le point $I(-1, 3, 0)$ et les plans $P_1 : 2x - y + z + 5 = 0$ et $P_2 : x - 2z + 1 = 0$

1) a) Montrer que les plans P_1 et P_2 sont perpendiculaires

   b) Montrer que la droite $D = P_1 \cap P_2$ passe I et dont un vecteur directeur est $\vec{U} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$

   c) Montrer que le plan P, perpendiculaire à D et passant par le point $A(2, 0, -1)$, a pour équation cartésienne : $2x + 5y + z - 3 = 0$

2) a) Déterminer par ces coordonnées le point H commun à D et P

   b) Calculer de deux manières la distance $d(A; D)$

3) Soit $S = \{M(x, y, z) \text{ tel que } x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 6 = 0\}$

   a) Montrer que S est une sphère de centre le point I et dont on déterminera le rayon R

b) Montrer que $S \cap P$ est un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon

c) Déterminer par leurs coordonnées les points communs à S et D

4) Déterminer par leurs équations cartésiennes les plans parallèles à P et tangents à S

Exercice 14

On désigne par S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 5 = 0$

1) Montrer que S est une sphère de centre $\Omega(0, 2, 0)$ et de rayon 3

2) Soit P le plan dont une équation cartésienne est : $2x - 2y + z - 2 = 0$

Déterminer la position relative de S et P. Caractériser $S \cap P$

3) Soit le plan P_m dont une équation cartésienne est : $2mx + (1-2m)y + mz + 1 - 2m = 0$

a) Soit Δ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 \\ z = -2\lambda \end{cases}$; $\lambda \in IR$

Vérifier que la droite Δ est incluse dans P_m

b) Calculer la distance $d(\Omega, P_m)$ du point Ω au plan P_m

d) Déterminer m pour que le plan P_m soit tangent à la sphère S. Préciser les coordonnées du point de contacte

Exercice 15

On considère les points $A(1, 1, -2)$, $B(1, 2, -2)$ et $C(0, 1, 1)$

1) Montrer que les points A, B et C définissent un plan P

2) a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + \vec{k}$

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan P est $3x + z - 1 = 0$

3) Soit Q le plan perpendiculaire à (AC) passant par A

a) Donner une équation cartésienne de Q

b) Montrer que P et Q sont perpendiculaires suivant (AB)

4) Soit S_m l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2my + 4z + 4 = 0$ $(m \in IR)$

a) Montrer que pour tout réel m, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m

b) Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m varie dans IR