

**Exercice 1**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes :

- |                        |                       |                        |
|------------------------|-----------------------|------------------------|
| 1) $y' - 2y = 0$       | 2) $4y' + 3y = 0$     | 3) $2y'' + y' + 3 = 0$ |
| 4) $2y' + 3y + 10 = 0$ | 5) $y'' + y' + 2 = 0$ | 6) $4y'' + 9y = 0$ .   |

**Exercice 2**

Soit l'équation différentielle (E):  $y' - y = -x^2 + 3$

- 1) Résoudre l'équation différentielle (E') :  $y' - y = 0$ .
- 2) Soit  $g(x) = ax^2 + bx + c$ , déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tel que  $g$  soit solution de (E).
- 3) Montrer que  $f$  est solution de (E) si et seulement si  $(f - g)$  est solution de (E').
- 4) En déduire les solutions de (E).

**Exercice 3**

On considère l'équation différentielle (E):  $y' - y = -(x - 1)^2$ .

- 1) Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = ax^2 + bx + c$ . Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  pour que  $g$  soit une solution de l'équation (E).
- 2) Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E<sub>0</sub>):  $y' - y = 0$ .
- 3) Montrer que  $f$  est une solution de (E) si et seulement si  $(f - g)$  est une solution de (E<sub>0</sub>).
- 4) Déterminer alors les solutions de (E).

**Exercice 4**

Soit l'équation différentielle (E) :  $y' + 2y = 5 \cos x$

- 1) Résoudre l'équation différentielle (E') :  $y' + 2y = 0$ .
- 2) Soit dans  $\mathbb{R}$  la fonction  $g(x) = a \cos x + b \sin x$ . Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que  $g$  soit une solution de l'équation (E).
- 3) Montrer que  $f$  est une solution de (E) si et seulement si  $(f - g)$  est une solution de (E').
- 4) En déduire les solutions de (E).

**Exercice 5**

Soit l'équation différentielle (E) :  $y' + y = x$ .

- 1) Résoudre l'équation différentielle (E<sub>0</sub>) :  $y' + y = 0$ .
- 2) Soit la fonction  $g(x) = ax + b$  où  $a$  et  $b$  sont deux réels. Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $g$  soit une solution de (E).
- 3) a) Montrer que  $f$  est une solution de (E) si et seulement si  $(f - g)$  est une solution de (E<sub>0</sub>).

b) Expliciter  $f(x)$  sachant que  $C_f$  courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  passe  $O$ .

4) Calculer  $\int_0^2 f(x) dx$

### Exercice 6

1) Résoudre les équations différentielles  $(E): y' + y \ln 2 = \ln 2$  et  $(E'): y'' + \pi^2 y = 0$   
 2) On donne ci-dessous les représentations graphiques de deux fonctions  $f$  et  $g$  solutions respectivement des équations  $(E)$  et  $(E')$ .

a) Reconnaître la courbe de  $f$  et celle de  $g$ .

b) Expliciter  $f(x)$  et  $g(x)$ .

3) Calculer l'aire  $\mathcal{A}$  de la partie du plan colorée sur la figure 2.

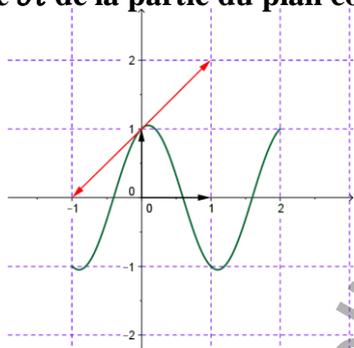


fig 1

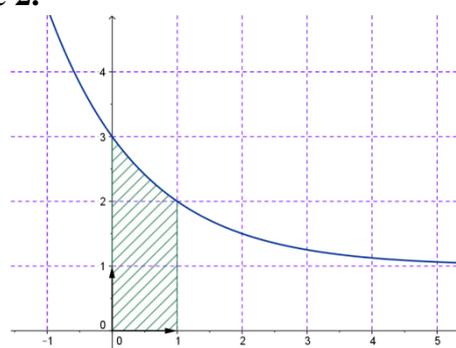


fig 2

### Exercice 7

1) Résoudre l'équation différentielle  $y'' + y = 0$

2) Soit  $E$  l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ;

$f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$  où  $f'$  désigne la fonction dérivée de  $f$ .

a) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \cos x$ . Vérifier que  $g$  est un élément de  $E$ .

b) Soit  $f$  un élément de  $E$ . Vérifier que, pour tout réel  $x$ ,  $f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

c) En déduire que si  $f$  est un élément de  $E$  alors  $f$  est une solution de l'équation différentielle :  
 $y'' + y = 0$ .

d) Déterminer alors l'ensemble  $E$

### Exercice 8

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $(E) : 9y'' + \pi^2 y = 0$ .

2) On désigne par  $f$  la solution particulière de  $(E)$  et soit  $C_f$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Déterminer  $f$  sachant que le point  $A(1, -\sqrt{2}) \in C_f$  et que  $C_f$  admet au point  $A$  une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

3) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \sqrt{2} \cos\left[\frac{\pi}{3}(x + 2)\right]$ .

4) Calculer la valeur moyenne de  $f$  sur l'intervalle  $[-2, -1]$ .

### Exercice 9

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (x + 2)e^{-x}$  et soit  $C_f$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Soit l'équation différentielle  $(E) : y' + y = e^{-x}$  et  $h$  la solution de  $(E)$  qui prend la valeur 2 en 0.

On pose  $g(x) = h(x) - xe^{-x}$ .

- Calculer  $g(0)$ .
  - Vérifier que  $g$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $y' + y = 0$ .
  - Expliciter alors  $g(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et en déduire que  $\forall x \in \mathbb{R} ; h(x) = f(x)$ .
- 2) soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\varphi(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2 + 5x + \frac{13}{2}\right)e^{-2x}$ .
- Montrer que  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $\varphi'(x)$ .
  - En déduire le volume  $\mathcal{V}$  en unité de volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la partie de  $C_f$  pour  $-2 \leq x \leq 0$

### Exercice 10

Soit l'équation différentielle  $(E) : y' - y - e^x + 1 = 0$ . On pose  $z = y - xe^x - 1$ .

- Montrer que  $z$  vérifie l'équation différentielle  $(E') : z' = z$ .
  - Déterminer alors  $z$  en fonction de  $x$ .
- 2) Déduire que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (x - 1)e^x + 1$  est la solution de  $(E)$  qui vérifie  $f(0) = 0$ .
- 3) Soit  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans en repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et déduire une asymptote  $(\Delta)$  à  $(C)$ .
  - Etudier la position relative de la courbe  $(C)$  par rapport à son asymptote  $(\Delta)$ .
  - Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et étudier la branche infinie de  $(C)$  au voisinage de  $+\infty$ .
- 4) a) Vérifier, en utilisant la question 2, que pour tout réel  $x$  on a :  $f(x) - 1 = f'(x) - e^x$ .
- b) Calculer l'aire  $\mathcal{A}$  de la partie du plan limitée par la courbe  $(C)$ , la droite  $(\Delta)$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ .

### Exercice 11

Soit l'équation différentielle  $(E) : y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$ .

- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $(E') : y' - 2y = 0$
- Montrer que la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = 2xe^{2x} + 1$  est une solution de  $(E)$ .
- Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
  - Montrer que  $f$  est une solution de  $(E)$  si et seulement si  $(f - h)$  est une solution de  $(E')$ .
  - En déduire les solutions de  $(E)$ .
- Soit  $g$  la solution de  $(E)$  qui s'annule en 0 et soit  $C_g$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
  - Expliciter  $g(x)$ .

- b) Calculer  $g\left(\frac{1}{2}\right)$  et montrer que pour tout  $x \leq \frac{1}{2}$  on a :  $g(x) \leq 1$ .
- 5) Calculer l'aire  $\mathcal{A}$  de la partie du plan limitée par la courbe  $C_g$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$ ,  $x = \frac{1}{2}$  et  $y = 1$ .

### Exercice 12

Soit l'équation différentielle  $(E) : y' + 3y = 10 \cos x$

- 1) Résoudre l'équation différentielle  $(E_0) : y' + 3y = 0$ .
- 2) Vérifier que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 3 \cos x + \sin x$  est une solution de  $(E)$
- 3) Montrer que  $f$  est une solution de  $(E)$  si et seulement si  $(f - g)$  est une solution de  $(E_0)$ .
- 4) Déterminer alors la solution de l'équation  $(E)$  tel que  $f(0) = 4$ .
- 5) Dédire une solution de l'équation  $(E_1) : y'' + 3y' = 10 \cos x$ .

### Exercice 13

On se propose de résoudre l'équation différentielle  $(E) : y' - y = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$

- 1) Déterminer la solution de l'équation :  $y' - y = 0$  qui prend la valeur 1 en 0.
- 2) Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  tel que  $f(0) = \ln 2$  et  $f(x) = e^x g(x)$ .
  - a) Calculer  $g(0)$ .
  - b) Calculer  $f'(x)$  en fonction de  $g'(x)$  et de  $g(x)$ .
- 3) a) Montrer que  $f$  est une solution de  $(E)$  si et seulement si  $g'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ 
  - b) En déduire l'expression de  $g$  puis celle de  $f$  de telle sorte que  $f$  soit une solution de  $(E)$ .

### Exercice 14

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$  et soit  $C_f$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère les équations différentielles :  $(E) : y' + 2y = 3e^{-3x}$  et  $(E') : y' + 2y = 0$ .

- 1) a) Résoudre l'équation différentielle  $(E')$ .
  - b) En déduire que la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = \frac{9}{2}e^{-2x}$  est solution de  $(E')$ .
  - c) Vérifier que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = -3e^{-3x}$  est solution de  $(E)$ .
- 2) a) En remarquant que  $f(x) = g(x) + h(x)$ , montrer que  $f$  est solution de  $(E)$ .
  - b) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = 3e^{-2x} \left( \frac{3}{2} - e^{-x} \right)$ .
  - c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3) a) Déterminer l'intersection de  $C_f$  avec les axes du repère.
  - b) Calculer  $f(1)$  et tracer l'allure de la courbe  $C_f$ .
- 4) Calculer l'aire  $\mathcal{A}$  de la partie du plan limité par  $C_f$ , les axes du repère et la droite d'équation  $x = 1$ .

### Exercice 15

On considère les équations différentielles

$\mathcal{C}$

$$(E_0) : y' - 3y = 0 \text{ et } (E) : y' - 3y = e^{2x+1}$$

et la courbe  $\mathcal{C}$  ci-contre d'une solution  $f$  de  $(E)$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

- 1) Résoudre l'équation  $(E_0)$ .
- 2) Vérifier que la fonction  $g$  définie par  $g(x) = -e^{2x+1}$  est une solution de  $(E)$ .
- 3) Montrer que  $f$  est une solution de  $(E)$  si et seulement si  $(f - g)$  est une solution de  $(E_0)$ .
- 4) En déduire les solutions de  $(E)$ .
- 5) a) Expliciter alors  $f(x)$ .  
b) Calculer l'aire  $\mathcal{A}$  de la partie du plan colorée sur la figure.

### Exercice 16

On considère les fonctions  $f$  dérivables sur  $\mathbb{R}$ , admettant une dérivée seconde et vérifiant :

$$f(0) = 0 ; f'(0) = 1 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} : y'' + 3y' + 2y = 0$$

- 1) a) On pose  $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) = e^x f(x)$ . Calculer  $g(0)$  et  $g'(0)$   
b) Montrer que  $g$  admet sur  $\mathbb{R}$  une dérivée seconde et que  $\forall x \in \mathbb{R} : g''(x) = -g'(x)$ .  
c) En déduire que  $g$  est solution de l'équation différentielle :  $g'(x) = 1 - g(x)$   
d) Exprimer alors  $g(x)$  en fonction de  $x$ .
- 2) Montrer qu'il existe une et une seule fonction  $f$  vérifiant les hypothèses de l'exercice et expliciter  $f(x)$

### Exercice 17

On considère l'équation différentielle :  $(A) : y' = -10y + 6$  où  $y$  désigne une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

- 1) a) Résoudre l'équation  $(A)$ .  
b) Vérifier que la solution  $f$  de l'équation différentielle  $(A)$  telle que  $f(0) = 0$  est :

$$f : x \mapsto \frac{3}{5}(1 - e^{-10x})$$

- 2) Aux bornes d'une bobine de résistance  $R$  (exprimé en ohms) et d'inductance  $L$  (exprimée en henrys), on branche, à l'instant  $t = 0$ , un générateur de force électromotrice  $E$  (exprimée en volts).  
L'unité de temps est la seconde.

L'intensité du courant dans le circuit (exprimé en ampères) est une fonction dérivable du temps, notée  $i$ . A l'instant  $t=0$  l'intensité est nulle.

Au cours de l'établissement du courant, la fonction  $i$  est solution de l'équation différentielle :

$$Li' + Ri = E$$

Dans toute la suite, on prend  $R = 5$ ,  $L = \frac{1}{2}$ ,  $E = 3$ .

- a) Déduire des questions précédentes l'expression de  $i(t)$  pour  $t \geq 0$ .

- b) Déterminer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t)$

### Exercice 18

A l'instant  $t = 0$  ( $t$  exprimé en heures) un médecin injecte à un patient une dose de  $1.4mg$  d'une substance médicamenteuse qui n'est pas présente dans le sang. Cette substance se répartit instantanément dans le sang, ensuite elle est progressivement éliminée.

On note  $Q(t)$  la quantité de substance (en ) présente dans le sang à l'instant  $t$ ,  $t \geq 0$ .

On admet que la fonction  $Q: t \mapsto Q(t)$  vérifie l'équation différentielle (E):  $y' + (0.115)y = 0$ .

- 1) Résoudre l'équation (E).
- 2) a) Justifier que  $Q(t) = 1,4e^{-0.115t}$ ;  $t \geq 0$ 
  - b) Donner le sens de variation de la fonction  $Q$ .
  - c) Résoudre dans  $[0, +\infty[$  l'équation  $Q(t) = 0.7$ ; la solution sera arrondie à l'unité.
- 3) Pour une efficacité optimale de ce médicament, sa quantité présente dans le sang doit être comprise entre  $0.7 mg$  et  $1.4mg$ .

Expliquer pourquoi le médecin prescrit à ce patient une injection de  $0.7mg$  chaque six heures.

### Exercice 19

On se propose de déterminer toutes les fonctions  $f$  définies et dérivables sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  vérifiant l'équation différentielle (E) :  $xf'(x) - (2x + 1)f(x) = 8x^2$ .

- 1) a) Démontrer que si  $f$  est solution de (E) alors la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par :

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ est solution de l'équation différentielle (E') : } y' = 2y + 8.$$

- b) Montrer que si  $h$  est solution de (E')  $\Leftrightarrow$  la fonction  $f$  définie par  $f(x) = xh(x)$  est solution de (E).
- 2) Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E)
- 3) Existe-t-il une fonction  $f$  solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  passe par le point  $A(\ln 2, 0)$ ? Si oui la préciser.

### Exercice 20

Soit l'équation différentielle (E) :  $y - y' = \frac{e^x}{x^2} \quad \forall x \in ]0, +\infty[$

et la courbe  $\mathcal{C}$  ci-contre d'une solution  $f$  de (E)

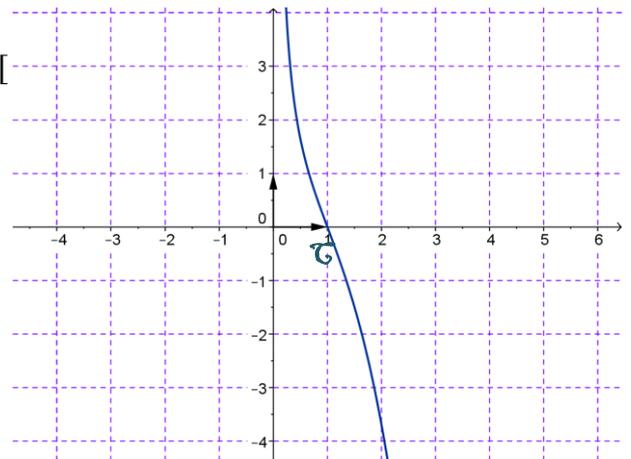
définie sur  $]0, +\infty[$

- 1) a) Résoudre l'équation différentielle (E') :  $y - y' = 0$

- b) On donne  $\forall x \in ]0, +\infty[ \quad g(x) = \frac{x+1}{x} e^x$ .

Montrer que  $g$  est une solution de (E)

- 2) Montrer que  $f$  est solution de (E) si et seulement si  $f - g$  est une solution de (E').
- 3) En déduire les solutions  $f$  de (E) sur  $]0, +\infty[$
- 4) Expliciter alors  $f(x)$ .



### Exercice 21

A) Soit l'équation différentielle (E) :  $y' + y = e^{-x}$ .

- 1) Résoudre l'équation différentielle (E') :  $y' + y = 0$ .

- 2) Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tel que  $g(x) = (ax + b)e^{-x}$  soit une solution de  $(E)$  vérifiant  $g(0) = 1$ .
- 3) Montrer que  $f$  est solution de  $(E)$  si et seulement de  $(E)$  si et seulement si  $f - g$  est solution de  $(E')$ .
- 4) En déduire la solution de  $(E)$  qui s'annule en 1.

**B)** On considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\varphi(x) = xe^{-x}$  et soit  $(C_\varphi)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Unité graphique 2 cm.

1) Dresser le tableau de variation de  $\varphi$ .

2) On pose pour tout entier naturel  $n \geq 2$  :  $I_n = \int_1^n \varphi(x) dx$

a) Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$  :  $I_n = \frac{2}{e} - (n+1)e^{-n}$

b) En déduire la limite de la suite  $(I_n)$ .

3) a) Soit  $h$  la restriction de la fonction  $\varphi$  à l'intervalle  $[1, +\infty[$ . Montrer que  $h$  réalise une bijection de  $[1, +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera.

b) Construire  $(C_\varphi)$  et  $(C')$  courbe représentative de la fonction  $h^{-1}$  la réciproque de  $h$ .

**C)** Soit la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $U_n = \sum_{k=1}^n \varphi(k)$ .

1) Montrer que la suite  $(U_n)$  est croissante.

2) a) Soit  $k$  un entier naturel non nul. Montrer que  $\varphi(k+1) \leq \int_k^{k+1} \varphi(t) dt \leq \varphi(k)$

b) En déduire que pour entier naturel non nul :  $ne^{-n} + \int_1^n \varphi(t) dt \leq U_n \leq e^{-1} + \int_1^n \varphi(t) dt$

c) Montrer alors que la suite  $(U_n)$  est convergente et donner un encadrement de sa limite.