EQUATIONS DIFFERENTIELLES $4^{ème}$ Sc Expérimentales

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1) $y' - 2y = 0$ 2) $4y' + 3y = 0$ 3) $2y'' + y' + 3 = 0$

4) $2y' + 3y + 10 = 0$ 5) $y'' + y' + 2 = 0$ 6) $4y'' + 9y = 0$.

Exercice 2

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + y = x$.

1) Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + y = 0$.

2) Soit la fonction $g(x) = ax + b$ où a et b sont deux réels. Déterminer a et b pour que g soit une solution de (E).

3) a) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est une solution de (E_0).

b) Expliciter $f(x)$ sachant que C_f courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. passe O.

4) Calculer $\int_0^2 f(x)\, dx$

Exercice 3

On considère l'équation différentielle $(E): y' - y = -(x-1)^2$.

1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer les réels a, b et c pour que g soit une solution de l'équation (E).

2) Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0): y' - y = 0$.

3) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est une solution de (E_0).

4) Déterminer alors les solutions de (E).

Exercice 4

Soit l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E') : y' - 2y = 0$

2) Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2xe^{2x} + 1$ est une solution de (E).

3) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - h)$ est une solution de (E').

b) En déduire les solutions de (E).

4) Soit g la solution de (E) qui s'annule en 0 et soit C_g sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Expliciter $g(x)$.

b) Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et montrer que pour tout $x \leq \frac{1}{2}$ on a : $g(x) \leq 1$.

5) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe C_g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0, x = \frac{1}{2}$ et $y = 1$.

Exercice 5

On considère l'équation différentielle : $(A) : y' = -10y + 6$ où y désigne une fonction dérivable sur IR.

1) a) Résoudre l'équation (A).

b) Vérifier que la solution f de l'équation différentielle (A) telle que $f(0) = 0$ est :

$f : x \mapsto \frac{3}{5}(1 - e^{-10x})$

2) Aux bornes d'une bobine de résistance R (exprimé en ohms) et d'inductance L (exprimée en henrys) , on branche , à l'instant $t = 0$, un générateur de force électromotrice E (exprimée en volts).

L'unité de temps est la seconde.

L'intensité du courant dans le circuit (exprimé en ampères) est une fonction dérivable du temps , notée i .A l'instant t=0 l'intensité est nulle.

Au cours de l'établissement du courant , la fonction i est solution de l'équation différentielle :

$Li' + Ri = E$

Dans toute la suite , on prend $R = 5$, $L = \frac{1}{2}$, $E = 3$.

a) Déduire des questions précédentes l'expression de $i(t)$ pour $t \geq 0$.

b) Déterminer $\lim_{t \to +\infty} i(t)$

Exercice 6

II) On considère l'équation différentielle : $(E): y' - y = 2xe^x$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_0): y' - y = 0$

2) Vérifier que $h: x \mapsto x^2 e^x$ est solution de (E)

3) a) Montrer que g est solution de (E) si et seulement si $(g - h)$ est solution de (E_0)

b) Résoudre alors l'équation (E)

c) Déterminer la solution de (E) qui prend pour valeur 1 en 0

II) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 1)e^x$

1) Dresser le tableau de variation de f

2) Tracer la courbe C_f dans un repère othonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

3) Soit α un réel strictement négatif

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_\alpha = \int_\alpha^0 xe^x\,dx$

b) On désigne par $A(\alpha)$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites d'équations $y = 0$, $x = \alpha$ et $x = 0$

Calculer $A(\alpha)$ sans utiliser une intégration par parties

c) En déduire $\lim_{\alpha \to -\infty} A(\alpha)$

Exercice 7

A l'instant $t = 0$ (t exprimé en heures) un médecin injecte à un patient une dose de $1.4mg$ d'une substance médicamenteuse qui n'est pas présente dans le sang. Cette substance se répartit instantanément dans le sang, ensuite elle est progressivement éliminée.

On note $Q(t)$ la quantité de substance (en) présente dans le sang à l'instant t, □$t \geq 0$□.

On admet que la fonction $Q: t \mapsto Q(t)$ vérifie l'équation différentielle $(E): y' + (0.115)y = 0$.

1) Résoudre l'équation (E).

2) a) Justifier que $Q(t) = 1{,}4e^{-0.115t}$; $t \geq 0$

   b) Donner le sens de variation de la fonction Q.

   c) Résoudre dans $[0\,, +\infty[$□l'équation $Q(t) = 0.7$; la solution sera arrondie à l'unité.

3) Pour une efficacité optimale de ce médicament, sa quantité présente dans le sang doit être comprise entre 0.7 mg et 1.4mg .

Expliquer pourquoi le médecin prescrit à ce patient une injection de 0.7mg chaque six heures.

Exercice 8

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$

2) Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in IR$; $f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

   a) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = \cos x$. Vérifier que g est un élément de E.

   b) Soit f un élément de E. Vérifier que, pour tout réel x, $f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

   c) En déduire que si f est un élément de E alors f est une solution de l'équation différentielle : $y'' + y = 0$.

   d) Déterminer alors l'ensemble E.

Exercice 9

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : 9y'' + \pi^2 y = 0$.

2) On désigne par f la solution particulière de (E) et soit C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O\,, \vec{\imath}\,, \vec{\jmath}\,)$.

Déterminer f sachant que le point $A(1\,, -\sqrt{2}) \in C_f$ et que C_f admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

3) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{2}\cos\left[\frac{\pi}{3}(x+2)\right]$.

4) Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[-2\,, -1]$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)e^{-x}$ et soit C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O\,, \vec{\imath}\,, \vec{\jmath}\,)$.

1) Soit l'équation différentielle $(E) : y' + y = e^{-x}$ et h la solution de (E) qui prend la valeur 2 en 0.

On pose $g(x) = h(x) - xe^{-x}$.

   a) Calculer $g(0)$.

   b) Vérifier que g est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' + y = 0$.

   c) Expliciter alors $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$; $h(x) = f(x)$.

2) soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2 + 5x + \frac{13}{2}\right)e^{-2x}$.

a) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'(x)$.

b) En déduire le volume $\mathcal{V}$ en unité de volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la partie de C_f pour $-2 \leq x \leq 0$

Exercice 11

Soit l'équation différentielle $(E) : y' - y - e^x + 1 = 0$. On pose $z = y - xe^x - 1$.

1) a) Montrer que z vérifie l'équation différentielle $(E') : z' = z$.

b) Déterminer alors z en fonction de x.

2) Déduire que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)e^x + 1$ est la solution de (E) qui vérifie $f(0) = 0$.

3) Soit (C) la courbe représentative de f dans en repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et déduire une asymptote (Δ) à (C).

b) Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote (Δ).

c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.

4) a) Vérifier, en utilisant la question 2, que pour tout réel x on a : $f(x) - 1 = f'(x) - e^x$.

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 12

On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E): y' - y = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$

1) Déterminer la solution de l'équation : $y' - y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.

2) Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ tel que $f(0) = \ln 2$ et $f(x) = e^x g(x)$.

a) Calculer $g(0)$.

b) Calculer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et de $g(x)$.

3) a) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

b) En déduire l'expression de g puis celle de f de telle sorte que f soit une solution de (E).

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$ et soit C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On considère les équations différentielles : $(E) : y' + 2y = 3e^{-3x}$ et $(E') : y' + 2y = 0$.

1) a) Résoudre l'équation différentielle (E').

b) En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{9}{2}e^{-2x}$ est solution de (E').

c) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de (E).

2) a) En remarquant que $f(x) = g(x) + h(x)$, montrer que f est solution de (E).

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = 3e^{-2x}\left(\frac{3}{2} - e^{-x}\right)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Déterminer l'intersection de C_f avec les axes du repère.

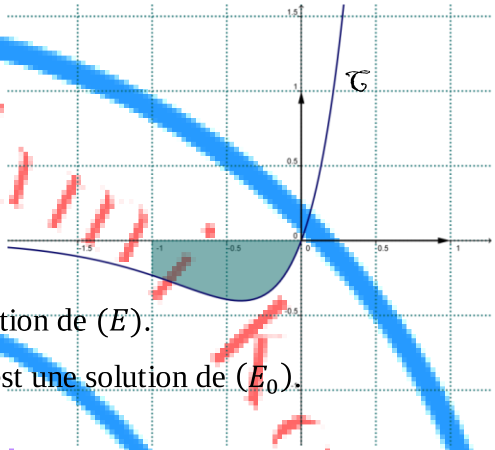
b) Calculer $f(1)$ et tracer l'allure de la courbe C_f.

4) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limité par C_f, les axes du repère et la droite d'équation $x = 1$.

Exercice 14

On considère les équations différentielles

$(E_0) : y' - 3y = 0$ et $(E) : y' - 3y = e^{2x+1}$



et la courbe $\mathcal{C}$ ci-contre d'une solution f de (E) définie sur IR.

1) Résoudre l'équation (E_0).

2) Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = -e^{2x+1}$ est une solution de (E).

3) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est une solution de (E_0).

4) En déduire les solutions de (E).

5) a) Expliciter alors $f(x)$.

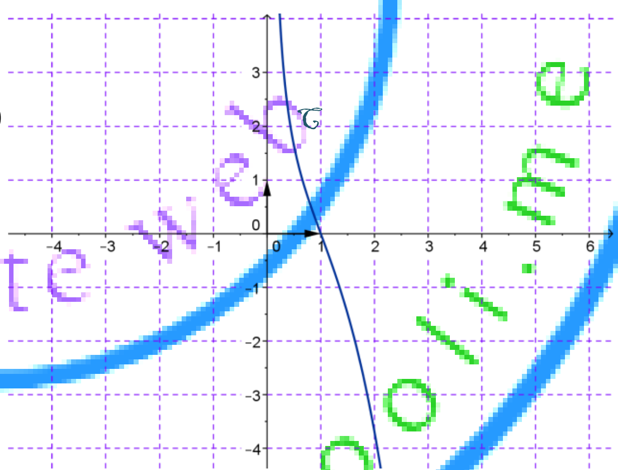
b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan colorée sur la figure.

Exercice 15

Soit l'équation différentielle $(E) : y - y' = \frac{e^x}{x^2}$ $\forall x \in]0, +\infty[$

et la courbe $\mathcal{C}$ ci-contre d'une solution f de (E)

définie sur $]0, +\infty[$



1) a) Résoudre l'équation différentielle $(E') : y - y' = 0$

b) On donne $\forall x \in]0, +\infty[$ $g(x) = \frac{x+1}{x}e^x$.

Montrer que g est une solution de (E)

2) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est une solution de (E').

3) En déduire les solutions f de (E) sur $]0, +\infty[$

4) Expliciter alors $f(x)$.

Exercice 16

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0, +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle $(E) : xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2$.

1) a) Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle $(E') : y' = 2y + 8$.

b) Montrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de (E).

2) Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E)

3) Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ passe par le point $A(\ln 2\ , 0)$? Si oui la préciser.