

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

- | | | |
|------------------------|-----------------------|------------------------|
| 1) $y' - 2y = 0$ | 2) $4y' + 3y = 0$ | 3) $2y'' + y' + 3 = 0$ |
| 4) $2y' + 3y + 10 = 0$ | 5) $y'' + y' + 2 = 0$ | 6) $4y'' + 9y = 0$. |

Exercice 2

Soit l'équation différentielle (E): $y' - y = -x^2 + 3$

- 1) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' - y = 0$.
- 2) Soit $g(x) = ax^2 + bx + c$, déterminer les réels a , b et c tel que g soit solution de (E).
- 3) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est solution de (E').
- 4) En déduire les solutions de (E).

Exercice 3

On considère l'équation différentielle (E): $y' - y = -(x - 1)^2$.

- 1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer les réels a , b et c pour que g soit une solution de l'équation (E).
- 2) Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E₀): $y' - y = 0$.
- 3) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est une solution de (E₀).
- 4) Déterminer alors les solutions de (E).

Exercice 4

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 5 \cos x$

- 1) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.
- 2) Soit dans $\mathbb{R}$ la fonction $g(x) = a \cos x + b \sin x$. Déterminer les réels a et b pour que g soit une solution de l'équation (E).
- 3) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est une solution de (E').
- 4) En déduire les solutions de (E).

Exercice 5

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = 10 \cos x$

- 1) Résoudre l'équation différentielle (E₀) : $y' + 3y = 0$.
- 2) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3 \cos x + \sin x$ est une solution de (E)
- 3) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est une solution de (E₀).
- 4) Déterminer alors la solution de l'équation (E) tel que $f(0) = 4$.
- 5) Déduire une solution de l'équation (E₁) : $y'' + 3y' = 10 \cos x$.

Exercice 6

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E): $y' - y = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$

- 1) Déterminer la solution de l'équation : $y' - y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.
- 2) Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ tel que $f(0) = \ln 2$ et $f(x) = e^x g(x)$.
 - a) Calculer $g(0)$.
 - b) Calculer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et de $g(x)$.
- 3) a) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$
 - b) En déduire l'expression de g puis celle de f de telle sorte que f soit une solution de (E) .

Exercice 7

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + y = x$.

- 1) Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + y = 0$.
- 2) Soit la fonction $g(x) = ax + b$ où a et b sont deux réels. Déterminer a et b pour que g soit une solution de (E) .
- 3) a) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est une solution de (E_0) .
 - b) Expliciter $f(x)$ sachant que C_f courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ passe O .
- 4) Calculer $\int_0^2 f(x) dx$

Exercice 8

- 1) Résoudre les équations différentielles $(E) : y' + y \ln 2 = \ln 2$ et $(E') : y'' + \pi^2 y = 0$
- 2) On donne ci-dessous les représentations graphiques de deux fonctions f et g solutions respectivement des équations (E) et (E') .
 - a) Reconnaître la courbe de f et celle de g .
 - b) Expliciter $f(x)$ et $g(x)$.
- 3) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan colorée sur la figure 2.

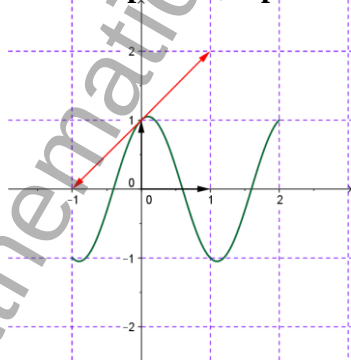


fig 1

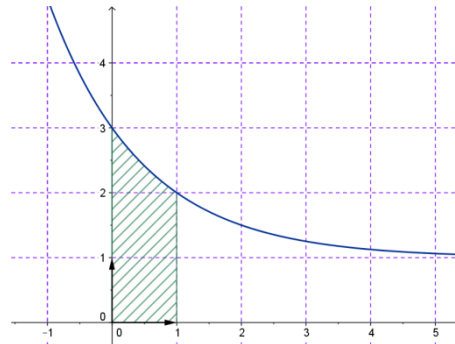


fig 2

Exercice 9

- 1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$
- 2) Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ où f' désigne la fonction dérivée de f .
 - a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x$. Vérifier que g est un élément de E .

- b) Soit f un élément de E . Vérifier que, pour tout réel x , $f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
- c) En déduire que si f est un élément de E alors f est une solution de l'équation différentielle : $y'' + y = 0$.
- d) Déterminer alors l'ensemble E

Exercice 10

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : 9y'' + \pi^2 y = 0$.
- 2) On désigne par f la solution particulière de (E) et soit C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer f sachant que le point $A(1, -\sqrt{2}) \in C_f$ et que C_f admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

- 3) Montrer que pour tout réel x , $f(x) = \sqrt{2} \cos\left[\frac{\pi}{3}(x+2)\right]$.
- 4) Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[-2, -1]$.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)e^{-x}$ et soit C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Soit l'équation différentielle $(E) : y' + y = e^{-x}$ et h la solution de (E) qui prend la valeur 2 en 0. On pose $g(x) = h(x) - xe^{-x}$.
- a) Calculer $g(0)$.
- b) Vérifier que g est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' + y = 0$.
- c) Expliciter alors $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R} ; h(x) = f(x)$.
- 2) soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2 + 5x + \frac{13}{2}\right)e^{-2x}$.
- a) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'(x)$.
- b) En déduire le volume V en unité de volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la partie de C_f pour $-2 \leq x \leq 0$

Exercice 12

Soit l'équation différentielle $(E) : y' - y - e^x + 1 = 0$. On pose $z = y - xe^x - 1$.

- 1) a) Montrer que z vérifie l'équation différentielle $(E') : z' = z$.
- b) Déterminer alors z en fonction de x .
- 2) Déduire que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)e^x + 1$ est la solution de (E) qui vérifie $f(0) = 0$.
- 3) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et déduire une asymptote (Δ) à (C) .
- b) Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote (Δ) .
- c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.

4) a) Vérifier, en utilisant la question 2, que pour tout réel x on a : $f(x) - 1 = f'(x) - e^x$.

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C) , la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 13

Soit l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E') : y' - 2y = 0$

2) Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2xe^{2x} + 1$ est une solution de (E) .

3) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - h)$ est une solution de (E') .

b) En déduire les solutions de (E) .

4) Soit g la solution de (E) qui s'annule en 0 et soit C_g sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Expliciter $g(x)$.

b) Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et montrer que pour tout $x \leq \frac{1}{2}$ on a : $g(x) \leq 1$.

5) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe C_g , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ et $y = 1$.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$ et soit C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les équations différentielles : $(E) : y' + 2y = 3e^{-3x}$ et $(E') : y' + 2y = 0$.

1) a) Résoudre l'équation différentielle (E') .

b) En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{9}{2}e^{-2x}$ est solution de (E') .

c) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de (E) .

2) a) En remarquant que $f(x) = g(x) + h(x)$, montrer que f est solution de (E) .

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = 3e^{-2x} \left(\frac{3}{2} - e^{-x} \right)$.

c) Dresser le tableau de variation de f .

3) a) Déterminer l'intersection de C_f avec les axes du repère.

b) Calculer $f(1)$ et tracer l'allure de la courbe C_f .

4) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limité par C_f , les axes du repère et la droite d'équation $x = 1$.

Exercice 15

On considère les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, admettant une dérivée seconde et vérifiant :

$f(0) = 0 ; f'(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R} : y'' + 3y' + 2y = 0$

1) a) On pose $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) = e^x f(x)$. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$

b) Montrer que g admet sur $\mathbb{R}$ une dérivée seconde et que $\forall x \in \mathbb{R} : g''(x) = -g'(x)$.

c) En déduire que g est solution de l'équation différentielle : $g'(x) = 1 - g(x)$

d) Exprimer alors $g(x)$ en fonction de x .

2) Montrer qu'il existe une et une seule fonction f vérifiant les hypothèses de l'exercice et expliciter $f(x)$

Exercice 16

On considère les équations différentielles

$$(E_0) : y' - 3y = 0 \text{ et } (E) : y' - 3y = e^{2x+1}$$

et la courbe $\mathcal{C}$ ci-contre d'une solution f de (E) définie sur $\mathbb{R}$.

1) Résoudre l'équation (E_0) .

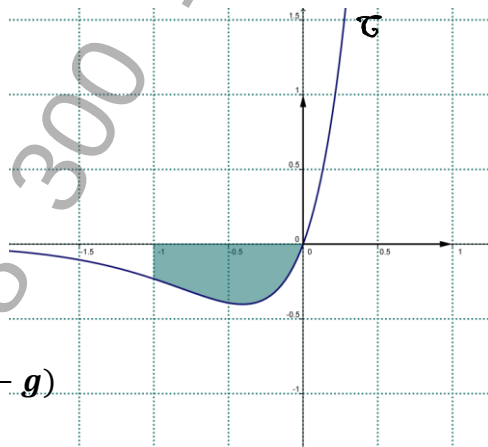
2) Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = -e^{2x+1}$ est une solution de (E) .

3) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est une solution de (E_0) .

4) En déduire les solutions de (E) .

5) a) Expliciter alors $f(x)$.

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan colorée sur la figure.



Exercice 17

On considère l'équation différentielle : $(A) : y' = -10y + 6$ où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) a) Résoudre l'équation (A) .

b) Vérifier que la solution f de l'équation différentielle (A) telle que $f(0) = 0$ est :

$$f : x \mapsto \frac{3}{5}(1 - e^{-10x})$$

2) Aux bornes d'une bobine de résistance R (exprimé en ohms) et d'inductance L (exprimée en henrys), on branche, à l'instant $t = 0$, un générateur de force électromotrice E (exprimée en volts).

L'unité de temps est la seconde.

L'intensité du courant dans le circuit (exprimé en ampères) est une fonction dérivable du temps, notée i . A l'instant $t=0$ l'intensité est nulle.

Au cours de l'établissement du courant, la fonction i est solution de l'équation différentielle :

$$Li' + Ri = E$$

Dans toute la suite, on prend $R = 5$, $L = \frac{1}{2}$, $E = 3$.

a) Déduire des questions précédentes l'expression de $i(t)$ pour $t \geq 0$.

b) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t)$

Exercice 18

A l'instant $t = 0$ (t exprimé en heures) un médecin injecte à un patient une dose de $1.4mg$

d'une substance médicamenteuse qui n'est pas présente dans le sang. Cette substance se répartit instantanément dans le sang, ensuite elle est progressivement éliminée.

On note $Q(t)$ la quantité de substance (en) présente dans le sang à l'instant t , $t \geq 0$.

On admet que la fonction $Q: t \mapsto Q(t)$ vérifie l'équation différentielle (E): $y' + (0.115)y = 0$.

- 1) Résoudre l'équation (E).
- 2) a) Justifier que $Q(t) = 1,4e^{-0.115t}$; $t \geq 0$
 b) Donner le sens de variation de la fonction Q .
 c) Résoudre dans $[0, +\infty[$ l'équation $Q(t) = 0.7$; la solution sera arrondie à l'unité.
- 3) Pour une efficacité optimale de ce médicament, sa quantité présente dans le sang doit être comprise entre 0.7 mg et 4 mg .

Expliquer pourquoi le médecin prescrit à ce patient une injection de 0.7 mg chaque six heures.

Exercice 19

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0, +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle (E) : $xf'(x) - (2x + 1)f(x) = 8x^2$.

- 1) a) Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' = 2y + 8$.
 b) Montrer que si h est solution de (E') $\Leftrightarrow$ la fonction f définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de (E).
- 2) Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E)
- 3) Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné $(O, \vec{i}, \vec{j})$ passe par le point $A(\ln 2, 0)$? Si oui la préciser.

Exercice 20

Soit l'équation différentielle (E) : $y - y' = \frac{e^x}{x^2} \quad \forall x \in]0, +\infty[$

et la courbe $\mathcal{C}$ ci-contre d'une solution f de (E)

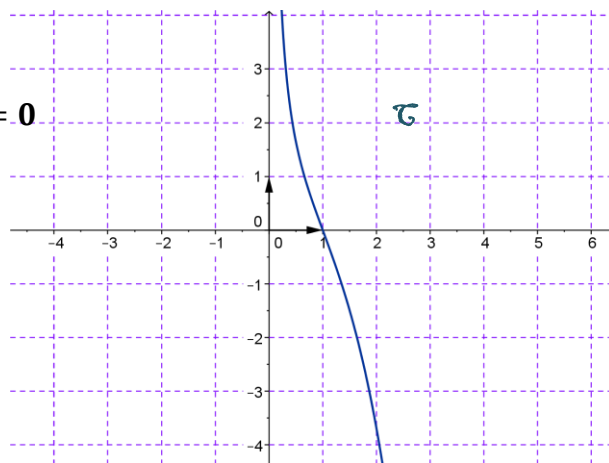
définie sur $]0, +\infty[$

- 1) a) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y - y' = 0$

b) On donne $\forall x \in]0, +\infty[\quad g(x) = \frac{x+1}{x} e^x$.

Montrer que g est une solution de (E)

- 2) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est une solution de (E').
- 3) En déduire les solutions f de (E) sur $]0, +\infty[$
- 4) Expliciter alors $f(x)$.



Exercice 21

A) Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

- 1) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.
- 2) Déterminer deux réels a et b tel que $g(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une solution de (E) vérifiant $g(0) = 1$.
- 3) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E').
- 4) En déduire la solution de (E) qui s'annule en 1.

B) On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = xe^{-x}$ et soit (C_φ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique 2 cm.

1) Dresser le tableau de variation de φ .

2) On pose pour tout entier naturel $n \geq 2$: $I_n = \int_1^n \varphi(x) dx$

a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$: $I_n = \frac{2}{e} - (n+1)e^{-n}$

b) En déduire la limite de la suite (I_n) .

3) a) Soit h la restriction de la fonction φ à l'intervalle $[1, +\infty[$. Montrer que h réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Construire (C_φ) et (C') courbe représentative de la fonction h^{-1} la réciproque de h .

C) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = \sum_{k=1}^n \varphi(k)$.

1) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

2) a) Soit k un entier naturel non nul. Montrer que $\varphi(k+1) \leq \int_k^{k+1} \varphi(t) dt \leq \varphi(k)$

b) En déduire que pour entier naturel non nul : $ne^{-n} + \int_1^n \varphi(t) dt \leq U_n \leq e^{-1} + \int_1^n \varphi(t) dt$

c) Montrer alors que la suite (U_n) est convergente et donne un encadrement de sa limite.