EQUATIONS DIFFERENTIELLES 4ème Mathématiques

Exercice 1

Résoudre dans ℝ les équations différentielles suivantes :

1) $y' - 2y = 0$ 2) $4y' + 3y = 0$ 3) $2y'' + y' + 3 = 0$

4) $2y' + 3y + 10 = 0$ 5) $y'' + y' + 2 = 0$ 6) $4y'' + 9y = 0$.

Exercice 2

Soit l'équation différentielle (E): $y' - y = -x^2 + 3$

1) **Résoudre l'équation différentielle** (E') : $y' - y = 0$.
2) **Soit** $g(x) = ax^2 + bx + c$, **déterminer les réels** a, b **et** c **tel que** g **soit solution de** (E).
3) **Montrer que** f **est solution de** (E) **si et seulement si** $(f - g)$ **est solution de** (E').
4) **En déduire les solutions de** (E).

Exercice 3

On considère l'équation différentielle (E): $y' - y = -(x-1)^2$.

1) **Soit la fonction** g **définie sur ℝ par :** $g(x) = ax^2 + bx + c$. **Déterminer les réels** a, b **et** c **pour que** g **soit une solution de l'équation** (E).
2) **Déterminer les solutions de l'équation différentielle** (E_0): $y' - y = 0$.
3) **Montrer que** f **est une solution de** (E) **si et seulement si** $(f - g)$ **est une solution de** (E_0).
4) **Déterminer alors les solutions de** (E).

Exercice 4

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 5\cos x$

1) **Résoudre l'équation différentielle** (E') : $y' + 2y = 0$.
2) **Soit dans ℝ la fonction** $g(x) = a\cos x + b\sin x$. **Déterminer les réels** a **et** b **pour que** g **soit une solution de l'équation** (E).
3) **Montrer que** f **est une solution de** (E) **si et seulement si** $(f - g)$ **est une solution de** (E').
4) **En déduire les solutions de** (E).

Exercice 5

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = x$.

1) **Résoudre l'équation différentielle** (E_0) : $y' + y = 0$.
2) **Soit la fonction** $g(x) = ax + b$ **où** a **et** b **sont deux réels. Déterminer** a **et** b **pour que g soit une solution de** (E).
3) a) **Montrer que** f **est une solution de** (E) **si et seulement si** $(f - g)$ **est une solution de** (E_0).

b) Expliciter $f(x)$ sachant que C_f courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ passe O.

4) Calculer $\int_0^2 f(x)\, dx$

Exercice 6

1) Résoudre les équations différentielles $(E): y' + y\ln 2 = \ln 2$ et $(E'): y'' + \pi^2 y = 0$

2) On donne ci-dessous les représentations graphiques de deux fonctions f et g solutions respectivement des équations (E) et (E').

a) Reconnaitre la courbe de f et celle de g.

b) Expliciter $f(x)$ et $g(x)$.

3) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan colorée sur la figure 2.

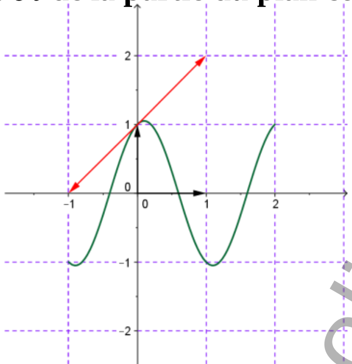


fig 1

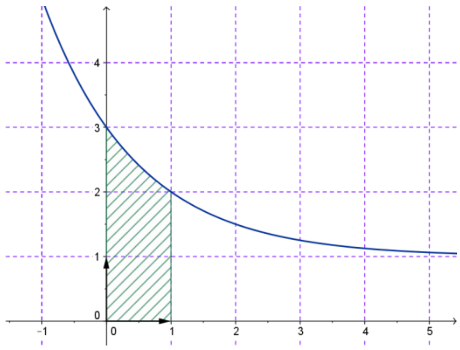


fig 2

Exercice 7

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$

2) Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in IR$;
$f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

a) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = \cos x$. Vérifier que g est un élément de E.

b) Soit f un élément de E. Vérifier que, pour tout réel x, $f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

c) En déduire que si f est un élément de E alors f est une solution de l'équation différentielle : $y'' + y = 0$.

d) Déterminer alors l'ensemble E

Exercice 8

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E): 9y'' + \pi^2 y = 0$.

2) On désigne par f la solution particulière de (E) et soit C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Déterminer f sachant que le point $A(1, -\sqrt{2}) \in C_f$ et que C_f admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

3) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{2}\cos\left[\frac{\pi}{3}(x+2)\right]$.

4) Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[-2, -1]$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)e^{-x}$ et soit C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Soit l'équation différentielle $(E) : y' + y = e^{-x}$ et h la solution de (E) qui prend la valeur 2 en 0. On pose $g(x) = h(x) - xe^{-x}$.

a) Calculer $g(0)$.

b) Vérifier que g est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' + y = 0$.

c) Expliciter alors $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$; $h(x) = f(x)$.

2) soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2 + 5x + \frac{13}{2}\right)e^{-2x}$.

a) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'(x)$.

b) En déduire le volume $\mathcal{V}$ en unité de volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la partie de C_f pour $-2 \leq x \leq 0$

Exercice 10

Soit l'équation différentielle $(E) : y' - y - e^x + 1 = 0$. On pose $z = y - xe^x - 1$.

1) a) Montrer que z vérifie l'équation différentielle $(E') : z' = z$.

b) Déterminer alors z en fonction de x.

2) Déduire que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)e^x + 1$ est la solution de (E) qui vérifie $f(0) = 0$.

3) Soit (C) la courbe représentative de f dans en repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et déduire une asymptote (Δ) à (C).

b) Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote (Δ).

c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.

4) a) Vérifier, en utilisant la question 2, que pour tout réel x on a : $f(x) - 1 = f'(x) - e^x$.

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 11

Soit l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E') : y' - 2y = 0$

2) Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2xe^{2x} + 1$ est une solution de (E).

3) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - h)$ est une solution de (E').

b) En déduire les solutions de (E).

4) Soit g la solution de (E) qui s'annule en 0 et soit C_g sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Expliciter $g(x)$.

b) Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et montrer que pour tout $x \leq \frac{1}{2}$ on a : $g(x) \leq 1$.

5) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe C_g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ et $y = 1$.

Exercice 12

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 3y = 10\cos x$

1) Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + 3y = 0$.
2) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3\cos x + \sin x$ est une solution de (E)
3) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est une solution de (E_0).
4) Déterminer alors la solution de l'équation (E) tel que $f(0) = 4$.
5) Déduire une solution de l'équation $(E_1) : y'' + 3y' = 10\cos x$.

Exercice 13

On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E): y' - y = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$

1) Déterminer la solution de l'équation : $y' - y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.
2) Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ tel que $f(0) = \ln 2$ et $f(x) = e^x g(x)$.

   a) Calculer $g(0)$.

   b) Calculer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et de $g(x)$.

3) a) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

   b) En déduire l'expression de g puis celle de f de telle sorte que f soit une solution de (E).

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$ et soit C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les équations différentielles : $(E) : y' + 2y = 3e^{-3x}$ et $(E') : y' + 2y = 0$.

1) a) Résoudre l'équation différentielle (E').

   b) En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{9}{2}e^{-2x}$ est solution de (E').

   c) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de (E).

2) a) En remarquant que $f(x) = g(x) + h(x)$, montrer que f est solution de (E).

   b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = 3e^{-2x}\left(\frac{3}{2} - e^{-x}\right)$.

   c) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Déterminer l'intersection de C_f avec les axes du repère.

   b) Calculer $f(1)$ et tracer l'allure de la courbe C_f.

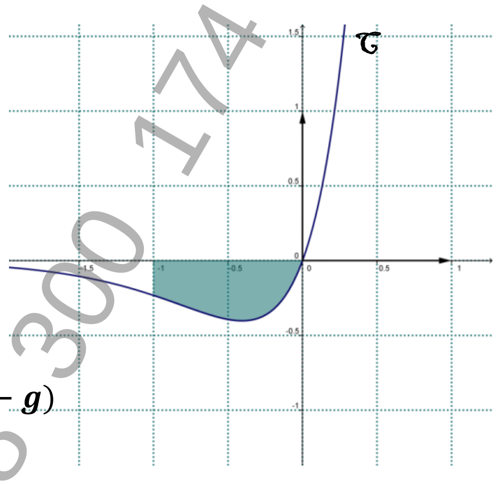
4) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limité par C_f, les axes du repère et la droite d'équation $x = 1$.

Exercice 15

On considère les équations différentielles

$(E_0) : y' - 3y = 0$ et $(E) : y' - 3y = e^{2x+1}$

et la courbe $\mathcal{C}$ ci-contre d'une solution f de (E) définie sur IR.



1) Résoudre l'équation (E_0).

2) Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = -e^{2x+1}$ est une solution de (E).

3) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est une solution de (E_0).

4) En déduire les solutions de (E).

5) a) Expliciter alors $f(x)$.

   b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan colorée sur la figure.

Exercice 16

On considère les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, admettant une dérivée seconde et vérifiant :

$f(0) = 0$; $f'(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R} : y'' + 3y' + 2y = 0$

1) a) On pose $\forall x \in \mathbb{R}$: $g(x) = e^x f(x)$. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$

   b) Montrer que g admet sur $\mathbb{R}$ une dérivée seconde et que $\forall x \in \mathbb{R} : g''(x) = -g'(x)$.

   c) En déduire que g est solution de l'équation différentielle : $g'(x) = 1 - g(x)$

   d) Exprimer alors $g(x)$ en fonction de x.

2) Montrer qu'il existe une et une seule fonction f vérifiant les hypothèses de l'exercice et expliciter $f(x)$

Exercice 17

On considère l'équation différentielle : $(A) : y' = -10y + 6$ où y désigne une fonction dérivable sur IR.

1) a) Résoudre l'équation (A).

   b) Vérifier que la solution f de l'équation différentielle (A) telle que $f(0) = 0$ est :

$f : x \mapsto \frac{3}{5}(1 - e^{-10x})$

2) Aux bornes d'une bobine de résistance R (exprimé en ohms) et d'inductance L (exprimée en henrys) , on branche , à l'instant $t = 0$, un générateur de force électromotrice E (exprimée en volts).

L'unité de temps est la seconde.

L'intensité du courant dans le circuit (exprimé en ampères) est une fonction dérivable du temps , notée i .A l'instant t=0 l'intensité est nulle.

Au cours de l'établissement du courant , la fonction i est solution de l'équation différentielle :

$Li' + Ri = E$

Dans toute la suite , on prend $R = 5$, $L = \frac{1}{2}$, $E = 3$.

   a) Déduire des questions précédentes l'expression de $i(t)$ pour $t \geq 0$.

   b) Déterminer $\lim_{t \to +\infty} i(t)$

Exercice 18

A l'instant $t = 0$ (t exprimé en heures) un médecin injecte à un patient une dose de $1.4mg$ d'une substance médicamenteuse qui n'est pas présente dans le sang. Cette substance se répartit instantanément dans le sang, ensuite elle est progressivement éliminée.

On note $Q(t)$ la quantité de substance (en) présente dans le sang à l'instant t, $t \geq 0$.

On admet que la fonction $Q : t \mapsto Q(t)$ vérifie l'équation différentielle $(E) : y' + (0.115)y = 0$.

1) Résoudre l'équation (E).

2) a) Justifier que $Q(t) = 1,4e^{-0.115t}$; $t \geq 0$

 b) Donner le sens de variation de la fonction Q.

 c) Résoudre dans $[0 , +\infty[$ l'équation $Q(t) = 0.7$; la solution sera arrondie à l'unité.

3) Pour une efficacité optimale de ce médicament, sa quantité présente dans le sang doit être comprise entre $0.7\ mg$ et $.4mg$.

Expliquer pourquoi le médecin prescrit à ce patient une injection de $0.7mg$ chaque six heures.

Exercice 19

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0 , +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle $(E) : xf'(x) - (2x + 1)f(x) = 8x^2$.

1) a) Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0 , +\infty[$ par : $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle $(E') : y' = 2y + 8$.

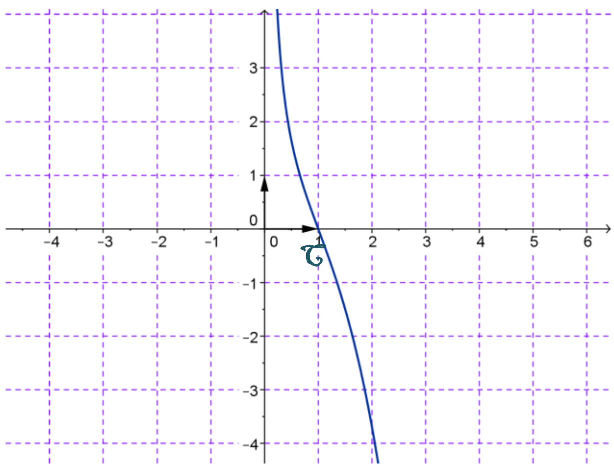
 b) Montrer que si h est solution de (E') ⇨ la fonction f définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de (E).

2) Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E)

3) Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné $(O , \vec{i} , \vec{j})$ passe par le point $A(\ln 2\ , 0)$? Si oui la préciser.

Exercice 20

Soit l'équation différentielle $(E) : y - y' = \frac{e^x}{x^2}$ $\forall x \in]0 , +\infty[$ et la courbe $\mathcal{C}$ ci-contre d'une solution f de (E) définie sur $]0 , +\infty[$



1) a) Résoudre l'équation différentielle $(E') : y - y' = 0$

 b) On donne $\forall x \in]0 , +\infty[$ $g(x) = \frac{x+1}{x}e^x$.

Montrer que g est une solution de (E)

2) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est une solution de (E').

3) En déduire les solutions f de (E) sur $]0 , +\infty[$

4) Expliciter alors $f(x)$.

Exercice 21

A) Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

1) Résoudre l'équation différentielle $(E') : y' + y = 0$.

2) Déterminer deux réels a et b tel que $g(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une solution de (E) vérifiant $g(0) = 1$.

3) Montrer que f est solution de (E) si et seulement de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E').

4) En déduire la solution de (E) qui s'annule en 1.

B) On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = xe^{-x}$ et soit (C_φ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique $2\ cm$.

1) Dresser le tableau de variation de φ.

2) On pose pour tout entier naturel $n \geq 2$: $I_n = \int_1^n \varphi(x)\,dx$

a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$: $I_n = \frac{2}{e} - (n + 1)e^{-n}$

b) En déduire la limite de la suite (I_n).

3) a) Soit h la restriction de la fonction φ à l'intervalle $[1, +\infty[$. Montrer que h réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Construire (C_φ) et (C') courbe représentative de la fonction h^{-1} la réciproque de h.

C) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi(k)$.

1) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

2) a) Soit k un entier naturel non nul. Montrer que $\varphi(k + 1) \leq \int_k^{k+1} \varphi(t)\,dt \leq \varphi(k)$

b) En déduire que pour entier naturel non nul : $ne^{-n} + \int_1^n \varphi(t)\,dt \leq U_n \leq e^{-1} + \int_1^n \varphi(t)\,dt$

c) Montrer alors que la suite (U_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.