Dans tous les exercices le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 1

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les équations suivantes :

$z^2-2z+2=0$; $z^2-4z+13=0$; $z^2-z+1=0$; $z^2-\sqrt{3}z+1=0$; $z^2-(2+i)z+3+i=0$

$z^2-(3+4i)z-1+5i=0$; $z^2-(1+i)z-2+2i=0$; $z^2-3(1+i)z+5i=0$; $z^2+4=0$

Exercice 2

Soit le nombre complexe $U=\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

1) Calculer U^2 puis écrire U^2 sous forme trigonométrique.

2) En déduire la forme trigonométrique de U et les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice 3

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant la réponse.

1) Le nombre $\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5$ est un réel.

2) Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2-6z+i=0$ sont $1+i$ et $-1+3i$

3) Soit z et z' deux nombres complexes non nuls. Si $arg(z')\equiv -arg(z)[2\pi]$ alors $z'=\overline{z}$

4) L'écriture exponentielle du nombre complexe $\left(\sqrt{3}+i\right)^8$ est $2^8e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$.

Exercice 4

1) **a)** Vérifier que $8-6i=(3-i)^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2+(1+i)z-2(1-i)=0$.

2) Soit θ un réel de $[0,\pi]$. On considère l'équation (E_θ) : $z^2+\left(1+e^{i\theta}\right)z-2\left(1-e^{i\theta}\right)=0$

a) Vérifier que (-2) est une solution de (E_θ).

b) Déterminer l'autre solution de (E_θ).

3) Soient A et M_θ les points d'affixes respectives -2 et $1-e^{i\theta}$; $\theta\in[0,\pi]$.

a) calculer AM_θ en fonction de θ.

b) Déterminer la valeur de θ de $[0,\pi]$ pour laquelle AM_θ est maximale.

Exercice 5

1) **a)** Vérifier que $(2+2i)^2=8i$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2(1+i)z-6i=0$

2) Soient les points , B et C d'affixes respectives :

$z_A=3+3i$; $z_B=-1-i$ et $z_C=\left(1-2\sqrt{3}\right)+\left(1+2\sqrt{3}\right)i$

a) Vérifier que $z_C-z_A=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_B-z_A)$

b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

3) Soit le point Ω d'affixe $z_\Omega=1+i$ et le point D symétrique du point C par rapport à Ω

a) Vérifier que Ω est le milieu du segment $[AB]$.

b) Placer les points , B , Ω , C et D.

c) Montrer que le quadrilatère $ACBD$ est un losange.

d) Calculer l'aire de ce losange.

Exercice 6

1) Soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : 2z^2 - \sqrt{3}(\sqrt{3}+i)z + 1 + i\sqrt{3} = 0$.

a) Vérifier que 1 est une racine de l'équation (E).

b) Déduire l'autre racine de (E).

2) On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_B = iz_A$

On désigne par I le milieu de $[AB]$ et on note z_I l'affixe de I.

a) Donner la forme exponentielle de z_A et z_B

b) Placer les points A ; B et I dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

3) **a)** Montrer que le triangle OAB est isocèle et rectangle.

b) En déduire que $OI = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $(\widehat{\vec{u}, \vec{OI}}) = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

c) Ecrire z_I sous la forme algébrique et en déduire la valeur exacte de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice 7

1) **a)** Vérifier que $(\sqrt{3} - 3i)^2 = -6 - 6\sqrt{3}\, i$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (\sqrt{3}+i)z + 2 + 2\sqrt{3}\, i = 0$

2) Soient les points A et B d'affixes respectives : $2i$ et $\sqrt{3} - i$

a) Ecrire sous forme trigonométrique les complexes $2i$ et $\sqrt{3} - i$

b) Placer dans le plan les points A et B

3) **a)** Soit le C point du plan tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$ déterminer l'affixe du point C.

b) Montrer que le point C appartient au cercle de centre O et passant par A

c) Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un losange.

Exercice 8

On considère les points , B et C d'affixes respectifs $z_A = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$, $z_B = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{2}i$ et $z_C = -\frac{1}{2} + i$

1) **a)** Vérifier que $z_A - z_C = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z_B - z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

b) Montrer que A et B appartiennent au cercle (C) de centre C et de rayon 1

c) Vérifier que $z_A - z_C = i(z_B - z_C)$. En déduire que le triangle CAB est rectangle en C

2) Dans la figure ci-contre on a tracé le cercle (C).

Construire les points A et B

3) **a)** Vérifier que $(2 + 2\sqrt{3})i$ est une racine carré de $-16 - 8\sqrt{3}$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : z^2 + 3z + \frac{25}{4} + 2\sqrt{3} = 0$

4) Soient les points K et L d'affixes respectifs $z_K = -\frac{3}{2} + i(1 + \sqrt{3})$ et $z_L = \overline{z_K}$

a) Montrer que $\frac{z_K - z_A}{z_A - z_C} = i\sqrt{3}$. En déduire que $(AK) \perp (AC)$

b) Construire K et L

c) Vérifier que $z_B - z_L = (2+\sqrt{3})(z_A - z_C)$. En déduire que $(BL)//(FC)$

d) Les droites (AK) et (BL) se coupent en un point D.

Montrer que le cercle (C) est inscrit dans le triangle DKL.

Exercice 9

Soit (E) : $z^2 - 2iz - 1 - ie^{2i\theta} = 0$ avec θ un réel de l'intervalle $[0, \pi]$

1) Résoudre (E) pour $\theta = \frac{\pi}{4}$

2) **a)** Vérifier que $e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$ est une racine carrée de $ie^{2i\theta}$

b) Résoudre (E)

3) On désigne par , B , C et I les points d'affixes respectives : $2i$, $i + e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$, $i - e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$ et i

Soit C le cercle de centre I et de rayon 1.

a) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IC}$. En déduire que $[BC]$ est un diamètre du cercle C

b) Montrer alors que pour $\neq \frac{\pi}{4}$, le quadrilatère $OBAC$ est un rectangle

Exercice 10

1) on considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - 4(4-3i) + 1 - 7i = 0$

Résoudre l'équation (E).

2) On considère les points A , B et C d'affixes respectifs $z_A = 3 - i$, $z_B = 1 - 2i$ et $z_C = 1 + 3i$

On désigne par (C) le cercle de diamètre $[BC]$

a) Placer les points AA, B et C

b) Calculer $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$

c) En déduire que le point A appartient au cercle (C)

Dans la suite de l'exercice M désigne un point du cercle (C) différent des points B et C

3) On pose $z_M = x + iy$ avec x et y deux réels. On note Ω le centre de (C)

a) Vérifier que $z_\Omega = 1 + \frac{1}{2}i$ et calculer ΩA

b) Montrer que $(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

4) Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite (BC) et on désigne par S l'aire du triangle MBC

a) Justifier que $z_H = 1 + iy$

b) Montrer que $S = \frac{5}{2}|x - 1|$

c) Déterminer les affixes du point M pour lesquels $S = 5$

Exercice 11

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$

2) Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$ et soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 - 2(1+\cos\theta)z + 2(1+\cos\theta) = 0$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E)

b) Ecrire ses solutions z' et z'' sous forme trigonométrique.

3) On désigne par M' et M'' les points d'affixes respectives z' et z''.

En déduire que lorsque θ varie dans $]-\pi\,,\pi[$ les deux points M' et M'' appartiennent à un même demi cercle que l'on précisera.

4) Dans cette question on suppose que $\theta = \frac{\pi}{2}$

a) Calculer z' et z'. (On désigne par z' la solution dont la partie imaginaire est positive)

b) Déterminer et construire les ensembles suivants :

$E = \{M(z)/|z-z'| = |z-z''|\}$ et $F = \{\{M(z)/|z-z'| = 2|z-z''|\}\}$

Exercice 12

Soit α un réel de l'intervalle $[0\,,\pi]$.

1) Vérifier que : $e^{2i\alpha} - 2ie^{i\alpha}\sin\alpha = 1$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2e^{2i\alpha}z + 2ie^{i\alpha}\sin\alpha = 0$

3) On désigne par , M' , M'' les points d'affixes respectives $e^{i\alpha}$, $e^{i\alpha} - 1$, et $e^{i\alpha} + 1$

a) Montrer que M est le milieu du segment $[M'M'']$ et que $\overrightarrow{MM'} = -\vec{u}$

b) Placer le point M dans le cas où $\alpha \in \left]0\,,\frac{\pi}{6}\right[$ et construire alors les points M' et M''

4) **a)** Montrer que $OM = \frac{1}{2}M'M''$ et en déduire que $OM'M''$ est un triangle rectangle.

b) Déterminer α pour que le tringle $OM'M''$ soit isocèle

Exercice 13

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (5-4i)z - 3 - 15i = 0$.

On désigne par A, B, A'et B' les points d'affixes respectifs : $-3i$; $5-i$; -3 et $1+5i$.

2) **a)** Placer les points A, B, A'et B'

b) Montrer que OAA' et OBB' sont des triangles rectangles et isocèles.

3) Soit M un point de la droite (AB) d'affixe z_M.

a) Montrer qu'il existe un réel k tel que $z_M = 5k + (2k-3)i$.

b) Montrer que les droites (OM) et $(A'B')$ sont perpendiculaires si et seulement si le point M est le milieu du segment $[AB]$. Vérifier que dans ce cas on a : $A'B' = 2OM$.

Exercice 14

1) Montrer que $ie^{i\frac{\pi}{6}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)z + (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}} = 0$

3) On désigne par , B et C les points d'affixes respectives : $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{12}}$

a) Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un losange

b) Placer les points , B et C

c) Calculer l'air du losange $OACB$.

Exercice 15

1) Résoudre dans C, l'équation (E): $z^2 - (1+i)z + 2(1+i) = 0$.

2) On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $2i$: $1-i$; $3-i$ et $3+i$

a) Placer les points A, B, C et D.

b) Montrer que le triangle ABD est isocèle.

c) Montrer que les points B et D sont symétriques par rapport à la droite (AC).

d) Calculer l'aire du triangle ABC et en déduire l'aire du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 16

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+i)z + i = 0$

2) Soit θ un réel de l'intervalle $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_\theta) : z^2 - 2e^{i\theta}\cos\theta\, z + e^{2i\theta} = 0$

a) Vérifier que 1 est solution de l'équation (E_θ)

b) En déduire l'autre solution de (E_θ).

3) On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et $e^{2i\theta}$.

a) Déterminer l'ensemble des points B quand θ varie dans l'intervalle $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Déterminer l'affixe du point C tel que $OACB$ est un losange.

c) Déterminer les réels θ pour que la mesure de l'aire du losange $OACB$ soit égale à $\frac{1}{2}$

Exercice 17

1) Soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : 2z^2 - \sqrt{3}(\sqrt{3}+i)z + 1 + i\sqrt{3} = 0$.

a) Vérifier que 1 est une racine de l'équation (E).

b) Déduire l'autre racine de (E).

2) On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_B = iz_A$

On désigne par I le milieu de $[AB]$ et on note z_I l'affixe de I.

a) Donner la forme exponentielle de z_A et z_B

b) Placer les points A ; B et I dans le repère $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$.

3) **a)** Montrer que le triangle OAB est isocèle et rectangle.

b) En déduire que $OI = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{OI}}\right) = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

c) Ecrire z_I sous la forme algébrique et en déduire la valeur exacte de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice 18

1) **a)** Vérifier que $(9+2i)^2 = 77 + 36i$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 + (9-2i)z - 18i = 0$

2) Déterminer dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation $z^4 + (9-2i)z^2 - 18i = 0$

On donnera les solutions sous forme trigonométrique.

3) Soient les points A et B d'affixes respectives $1+i$ et $3i$

a) Placer les points A et B.

b) Soit C le point d'affixe $1 + \alpha i$ où $\in \mathbb{R}$, Déterminer α pour que ABC soit un triangle rectangle en C

Exercice 19

1) On donne les points A, B et C d'affixes respectives $\sqrt{3}+i$; $-\sqrt{3}+i$ et $2i$

Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un losange.

2) **a)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2iz - 4 = 0$

b) Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de (E).

3) Soit $p(z) = z^3 - 4iz^2 - 8z + 8i$.

a) Vérifier que $p(2i) = 0$

b) Déterminer les nombres complexes m et p tels que $p(z) = (z-2i)(z^2 + mz + p)$.

c) Résoudre alors l'équation $p(z) = 0$.

Exercice 20

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 3z + 3 - i = 0$.

2) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$.

a) Vérifier que -1 est une solution de (E').

b) Trouver les nombres complexes a, b et c tel que : $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = (z+1)(az^2 + bz + c)$

c) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E').

3) Soient les points A, B et C d'affixes respectives : -1 ; $1 - i$ et $2 + i$

a) Placer les points A, B et C.

b) Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

c) Déterminer l'affixe du point D pour que $ABCD$ soit un carré.

Exercice 21

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

b) Ecrire les solutions trouvées sous la forme exponentielle.

c) En déduire les solutions de l'équation : $z^4 + 2\sqrt{3}z^2 + 4 = 0$.

2) Soit l'équation (E): $z^3 + 2\left(1 - i\sqrt{3}\right)z^2 + 4\left(1 - i\sqrt{3}\right)z + 8i = 0$.

a) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution imaginaire que l'on déterminera.

b) On pose $P(z) = z^3 + 2\left(1 - i\sqrt{3}\right)z^2 + 4\left(1 - i\sqrt{3}\right)z + 8i$

Déterminer les complexes a, b et c tel que : $\forall z \in \mathbb{C}$; $P(z) = (z + 2i)(az^2 + bz + c)$

c) Résoudre alors l'équation (E).

3) Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = -2i$; $z_B = \sqrt{3} + i$ et $z_C = \sqrt{3} - i$

a) Placer les points A, B et C.

b) Montrer que le quadrilatère $OABC$ est un losange.

Exercice 22

Soit $P(z) = z^3 + (1 - 2i)z^2 - (1 + 6i)z - 5$; $z \in \mathbb{C}$

1) a) Montrer que $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire que l'on déterminera.

b) Déterminer les complexes a, b et c tel que $\forall z \in \mathbb{C}$; $P(z) = (z - i)(az^2 + bz + c)$.

c) Résoudre alors l'équation : $P(z) = 0$

2) On considère les A, B et C d'affixes respectives $z_A = i$; $z_B = 1 + 2i$ et $z_C = -2 - i$

a) Placer les points A, B et C.

b) Montrer que les points A, B et C sont alignés

3) a) Montrer que OBC est un triangle isocèle.

b) Déterminer l'affixe z_D du point D pour que $OBDC$ soit un losange.

Exercice 23

1) Soit l'équation complexe (E): $z^3 + \left(i - \sqrt{3}\right)z^2 + \left(1 - i\sqrt{3}\right)z + i = 0$

a) Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire que l'on déterminera.

b) Déterminer les nombres complexes a, b et c tel que tel que $\forall z \in \mathbb{C}$ on a :

$z^3 + (i - \sqrt{3})z^2 + (1 - i\sqrt{3})z + i = (z + i)(az^2 + bz + c)$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) Soit $\theta \in \left]0\,,\pi\right[$.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ); $z^2 - 2e^{i\theta}z + (2i\sin\theta)e^{i\theta} = 0$

b) Vérifier que les solutions de (E_θ) s'écrivent sous la forme : $\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$

c) Déterminer alors les solutions de l'équation (E'_θ); $z^4 - 2e^{i\theta}z^2 + (2i\sin\theta)e^{i\theta} = 0$