Dans tous les exercices le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 1

1) a) Calculer $(\sqrt{3} - 3i)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (\sqrt{3} + i)z + 2 + 2i\sqrt{3} = 0$

2) Soient les points A et B d'affixes respectives : $2i$ et $\sqrt{3} - i$

a) Ecrire sous forme trigonométrique les complexes $2i$ et $\sqrt{3} - i$

b) Placer dans le plan les points A et B

3) a) Déterminer l'affixe du point C tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$.

b) Montrer que le point C appartient au cercle de centre O et passant par A

c) Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un losange

Exercice 2

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2iz - (1 + a^2) = 0$ où a est un paramètre complexe.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E), on notera par z_1 et z_2 ses solutions.

b) Montrer que $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow a \in R$.

2) Soient les points A, B, M, N et I d'affixes respectives 1 ; $-1 + 2i$; $i + a$; $i - a$ et i.

a) Montrer que M et N sont symétriques par rapport au point I.

b) Montrer que lorsque $M \notin (AB)$ AMBN est un parallélogramme.

3) On suppose que $a = e^{i\theta} + 1 - i$; où $\theta \in [0, 2\pi]$

a) Montrer que lorsque θ varie ; le point M varie sur le cercle $\mathfrak{C}$ de centre A et de rayon 1.

Exercice 3

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $(1 + i)z^2 - 2z + 1 - i = 0$

2) Soit m un nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et dont un argument est α.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $mz^2 - 2z + \overline{m} = 0$, où $\overline{m}$ est le nombre complexe conjugué de m .

3) a) Montrer que les racines z' et z'' de l'équation (E) s'écrivent sous la forme :

$z' = e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}$ et $z'' = e^{-i\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}$

b) On désigne par M' et M'' les points d'affixes respectives z' et z'' et par M le point d'affixe $z' + z''$

Montrer que $\frac{z'}{z''} = i$. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM''}$ sont orthogonaux

c) Montrer que le quadrilatère $OM'MM''$ est un carré.

Exercice 4

Soit le nombre complexe $u = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}i$

1) a) Ecrire u^2 sous la forme exponentielle.

b) En déduire l'écriture exponentielle de u.

2) Donner les valeurs exactes de $cos\ \frac{\pi}{12}$ et $sin\ \frac{\pi}{12}$

3) a) Construire les points A et B d'affixes respectives u et iu^2.

b) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixes z tel que $arg\left(\frac{iz+u^2}{z-u}\right) \equiv -\frac{11\pi}{12}[2\pi]$

c) Vérifier que O appartient à E puis tracer E.

Exercice 5

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (5-4i)z - 3 - 15i = 0$.

On désigne par A, B, A'et B' les points d'affixes respectifs : $-3i$; $5-i$; -3 et $1+5i$.

2) a) Placer les points A, B, A'et B'

b) Montrer que OAA' et OBB' sont des triangles rectangles et isocèles.

3) Soit M un point de la droite (AB) d'affixe z_M.

a) Montrer qu'il existe un réel k tel que $z_M = 5k + (2k-3)i$.

b) Montrer que les droites (OM) et $(A'B')$ sont perpendiculaires si et seulement si le point M est le milieu du segment $[AB]$.

Vérifier que dans ce cas on a : $A'B' = 2OM$.

Exercice 6

1) a) Donner la forme exponentielle du complexe $4\sqrt{2}(-1+i)$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$

2) soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que : $\frac{2z-1}{z} = 2e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\ cotan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(2z-1)^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)z^3$

Exercice 7

Soit m un réel non nul.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2iz - (1+m^2) = 0$.

2) Pour tout complexe z, on pose : $f(z) = z^3 - 3iz^2 - (3+m^2)z + i(1+m^2)$.

a) Vérifier que $f(i) = 0$ et en déduire une factorisation de $f(z)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = 0$.

3) On considère les points A, M' et M'' d'affixes respectives : i , $i+m$ et $i-m$.

a) Vérifier que A est le milieu du segment $[M'M'']$.

b) Montrer que le triangle $OM'M''$ est isocèle.

c) Déterminer les valeurs de m pour que le triangle $OM'M''$ soit équilatéral.

Exercice 8

1) Soit l'équation (E_θ) : $z^2 - 4e^{i\theta}z + 4e^{2i\theta} + 2 - 2i\sqrt{3} = 0$

a) Mettre le nombre $-2 + 2i\sqrt{3}$ sous la forme exponentielle.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ).

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$.

On désigne par M_1 et M_2

les points d'affixes respectives $z_1 = 2e^{i\theta} - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 2e^{i\theta} + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

a) Montrer que $z_1 = 4i\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}$ et $z_2 = 4\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}$

b) Déterminer, suivant les valeurs de θ dans $[-\pi\,,\pi]$, le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1 et z_2

3) a) Montrer que pour tout $\in [-\pi\,,\pi]\backslash\left\{\frac{-2\pi}{3}\,,\frac{\pi}{3}\right\}$, le triangle OM_1M_2 est rectangle en O.

b) Déterminer les valeurs de θ pour que le triangle O soit isocèle.

Exercice 9

1) a) Résoudre, dans C, l'équation : $z^2 - i(2 - e^{i\theta})z - 1 + e^{i\theta} = 0$ avec $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}\,,\pi\right]$

b) Ecrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.

2) Soient les points (1) , $B(i)$ et le cercle (C) de centre B et de rayon 1 et $M(z)$ un point de (C).
Faire une figure que l'on complètera dans la suite de l'exercice

3) Soit l'application $f : P\backslash\{B\} \to P\backslash\{A\}$ qui à tout $M(z)$ associe le point $M'(z')$ telle que $z' = \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}$

a) Soit N le point d'affixe $z_N = i - ie^{i\theta}$

Déterminer et Construire l'ensemble des points N lorsque θ varie dans $\left[\frac{\pi}{2}\,,\pi\right]$

b) Montrer que f n'admet aucun point invariant.

4) a) Vérifier que pour tout $z \neq i$, on a : $z' - 1 = \frac{-2i}{\bar{z}+i}$

b) En déduire que $\forall\, M \in P\backslash\{B\}$, on a $AM'.BM = 2$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BM}\,,\overrightarrow{AM'}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

d) Construire le point M' image du point M par f.

Exercice 10

Soit θ un réel de l'intervalle $]0\,,\pi[$ et soit (E_θ): $z^2 - (1+i)(i+e^{i\theta})z + i(i+e^{i\theta})^2$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

2) Soient les points M_1 et M_2 d'affixes respectives :
$z_1 = \cos\theta + i(1+\sin\theta)$ et $z_2 = -1 - \sin\theta + i\cos\theta$

a) Ecrire z_1 sous la forme exponentielle.

b) En déduire l'écriture exponentielle de z_2.

c) Montrer que le triangle OM_1M_2 est isocèle rectangle en O.

d) Déterminer l'affixe du point M pour que le quadrilatère OM_1MM_2 soit un carré.

3) Soit A le point d'affixe $-1+i$

a) Montrer que : $\frac{aff(\overrightarrow{AM_1})}{aff(\overrightarrow{AM_2})} = -\cot\frac{\theta}{2}$

b) En déduire que les points , M_1 et M_2 sont alignés.

4) Déterminer et construire l'ensemble des points M_1 d'affixe z_1 lorsque θ décrit $]0\,,\pi[$.

Exercice 11

Soit $f(z) = z^2 - 9\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - 81\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ avec $z \in C$

1) Calculer $f(9)$. En déduire les solutions de l'équation $f(z) = 0$

2) **a)** Résoudre dans C l'équation (E) : $z^8 - 9\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z^4 - 81\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

b) Ecrire les solutions sous la formes exponentielle

3) Parmi les solutions de l'équation (E) on trouve les deux solutions

$a = i\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Soit $\lambda = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\theta \in]0\,,\pi[$ et $r > 0$

a) Déterminer r et θ pour que les 3 nombres complexes a , λ et b soient, dans cet ordre, les 3 termes consécutifs d'une suite géométrique (U_n) , $n \in IN$

b) Déterminer alors la raison q de cette suite

c) Déterminer le module et un argument de U_n.

d) Pour quelles valeurs de , U_n est un réel ?

4) Soit $M(z)$ avec $z \in C$, Déterminer l'ensemble des points M tel que $bz^2 - a|z|^2 = 0$.

Exercice 12

Pour tout réel $\theta \in]-\pi\,,\pi]$, on considère la fonction f_θ définie sur $\mathbb{C}\backslash\{e^{i\theta}\}$ par : $f_\theta(z) = \frac{1+ze^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}$

1) Vérifier que si $\theta \in \left\{-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right\}$ alors $e^{i\theta}$ est invariant par f_θ.

2) On pose $\theta = 0$.

a) Montrer que pour tout nombre complexe z et z' de $\mathbb{C}\backslash\{-1\,,1\}$

$f_0(z) = z'$ si et seulement $z = -f_0(-z')$

b) Montrer que pour tout $\alpha \neq 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \neq \pi + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$ on a : $f_0(e^{i\alpha}) = \frac{i}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

c) Déterminer les racines carrées de $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

d) Utiliser les questions a) b) et c) pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(1+z)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1-z)^2$.

3) On suppose que $\theta \in]-\pi\,,\pi]\backslash\left\{-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right\}$. on désigne par A , B , M et M' les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$, $-e^{-i\theta}$, z et $z' = f_\theta(z)$

a) Montrer que tout $M \neq A$ et $M \neq B$ on a : $\left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \theta + \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,,\overrightarrow{MB}}\right)\ [2\pi]$

b) Pour $= \frac{\pi}{4}$, déterminer et construire l'ensemble Γ des points M lorsque M' décrit la demi-droite d'équation : $\begin{cases} y = -x \\ x > 0 \end{cases}$

Exercice 13

Soit m un nombre complexe non nul tel que : $|m| = r > 0$ et $Arg(m) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$. On désigne par M et A les points d'affixes respectifs m et 1.

1) Donner la forme exponentielle de $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

2) Déterminer r pour que $AM = 1$.

3) Soit l'équation (E_m) : $mz^2 - (1+i)z + \frac{\sqrt{3}+i}{2\overline{m}} = 0$. On désigne par M_1 et M_2 les images respectifs des nombres complexes z_1 et z_2 solutions de l'équation (E_m).

   a) Sans résoudre l'équation (E_m), montrer que $Arg(z_1 + z_2) \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$.

   b) Montrer que $m\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2\overline{m}}\right) = i$

   c) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m).

   d) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

4) Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle et isocèle en O.

5) Dans la suite de l'exercice M est un point du cercle trigonométrique.

   a) Soit $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi\}$; $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\frac{i-z}{i+z} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E'_m) $m\left(\frac{i-z}{i+z}\right)^2 - (1+i)\left(\frac{i-z}{i+z}\right) + \frac{\sqrt{3}+i}{2\overline{m}} = 0$.

Exercice 14

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E): $z^2 - \left(e^{2i\theta} + 2e^{i\theta}\right)z + e^{3i\theta} + e^{2i\theta} = 0$; $\theta \in [0, \pi[$

On désigne par z_1 et z_2 les solutions de (E)

1) Sans calculer Δ

   a) Montrer que z_1 et z_2 sont non nulles.

   b) Montrer que $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{e^{i\theta}+2}{e^{2i\theta}+e^{i\theta}}$

   c) Déterminer θ pour que $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{3}{2}$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

3) On considère les points I, M , M' et M'' d'affixes respectives :

$z_I = 1$; $z = e^{i\theta}$; $z' = 1 - e^{2i\theta}$ et $z'' = e^{2i\theta} + e^{i\theta}$; $\theta \in]0, \pi[$

   a) Mettre z' et z'' sous forme exponentielle.

   b) Montrer que les droites (OM) et (OM') sont perpendiculaires .

4) On a tracé ci-dessous le cercle (C) de centre I et de rayon 1 et (C') le cercle de diamètre $[OI]$.

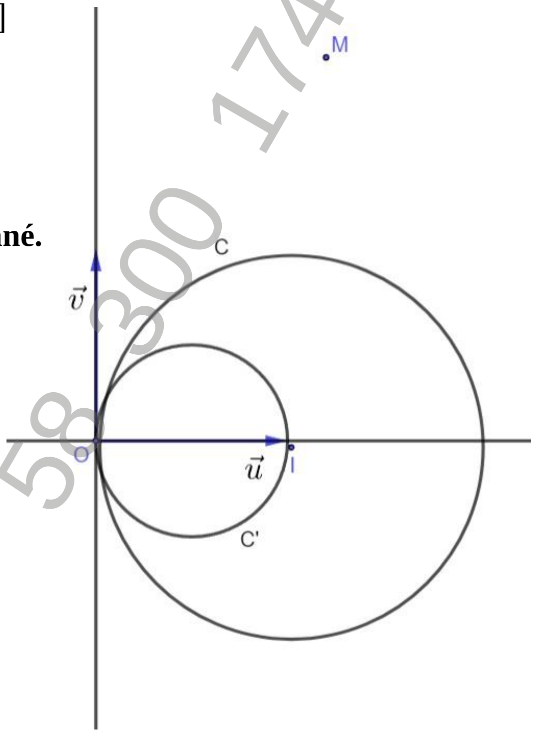
a) Vérifier que le point M' appartient au cercle (C).

b) Déterminer l'affixe du point K le milieu de $[M'M'']$

Vérifier que K appartient au cercle (C')

c) Montrer que $[OK)$ est la bissectrice de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

d) Construire les points M' et M'' pour le point M donné.



Exercice 15

On considère les points A et B d'affixes respectives a et 1 où $a \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$.Soit f l'application de $P\backslash\{B\}$ dans P qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{z-a}{z-1}$

1) Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation :
(E) : $z^2 - 2z + a = 0$

2) a) On suppose que $a = 1 + e^{2i\theta}$ où $\in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$. Résoudre l'équation (E)

b) Mettre sous forme trigonométrique chacune des solutions de (E).

3) Dans cette question on suppose que $a = -1$

Soit M un point de $P\backslash\{B\}$ d'affixe z et M' d'affixe $z' = f(z)$

a) Montrer que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM'}}\right) \equiv 0\ [2\pi]$

En déduire que la demi-droite $[BA)$ est une bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{BM'})$

b) Montrer que z' est imaginaire pur si et seulement si $|z| = 1$

c) En déduire la construction du point M' image d'un point M du cercle trigonométrique privé du point B.

Exercice 16

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 + (4 + 3i)z + 4 - 4i = 0$.

b) Déterminer les racines cinquièmes de i et $(-4 - 4i)$.

c) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_1) : $z^{10} + (4 + 3i)z^5 + 4 - 4i = 0$

d) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$(E_2) : z^2 + (4 + 3i)e^{i\alpha}z + (4 - 4i)e^{2i\alpha} = 0 \ ; \ \alpha \in]-\pi, \pi]$$

2) Soit l'équation (E'): $z^3+(5+3i)z^2+(8-i)z+4-4i=0$.

a) Montrer que l'équation (E') admet une solution réelle que l'on déterminera.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation (E').

3) a) Montrer que pour tout $\in\,]0\,,\pi[$, on a : $\frac{z+i}{z-i}=e^{i\theta}$ si et seulement si $z=\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation : $(z^2+1)^5=i(z-i)^{10}$.

Exercice 17

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(1+i)z-i=0$

Résoudre l'équation (E). On note z_1 et z_2 les solutions de (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$.

On désigne par A, B, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives : 1 , i , z_1 et z_2 .

Soit z un nombre complexe distinct de , i , z_1 et z_2 .

On note M et M' les points d'affixes respectives z et $z'=\frac{z+i}{z-i}$

Justifier que les points M et M' sont distincts.

Dans la suite de l'exercice on prend $z=i+2e^{i\theta}$, où θ est un réel.

3) a) Montrer que M décrit le cercle Γ de centre B et de rayon 2.

b) Montrer que $z'=1+ie^{-i\theta}$

c) Montrer que $AM'=1$ et que $\left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AM'}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}-\theta\;[2\pi]$.

d) Déterminer l'ensembles des points M' lorsque le point M décrit le cercle Γ.

4) Soit P le milieu du segment $[MM']$ et z_P son affixe.

On désigne par Q le point d'affixe $z_Q=e^{i\frac{\pi}{4}}z_P$

a) Vérifier que : $z_P=\frac{1+i+2e^{i\theta}+ie^{-i\theta}}{2}$

b) En déduire que $z_Q=\frac{i\sqrt{2}+2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}-e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}}{2}$

c) Montrer alors que $z_Q=\frac{1}{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{6}{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

5) Montrer que lorsque le point M varie sur le cercle Γ, alors les coordonnées du point $Q(x\,,y)$ vérifient l'équation suivante : $4x^2+\frac{9}{4}\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$

Exercice 18

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^3+\left(1-2\cos\frac{\pi}{12}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)z^2-\left(2\cos\frac{\pi}{12}e^{i\frac{\pi}{4}}-i\right)z+i=0$

1) a) Vérifier que $\left(2\sin\frac{\pi}{12}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2=-4i\sin^2\frac{\pi}{12}$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E'): $z^2-2\cos\frac{\pi}{12}e^{i\frac{\pi}{4}}z+i=0$

c) Ecrire les solutions de (E') sous forme exponentielle.

2) a) Vérifier que $z_0 = -1$ est une racine de (E).

b) Montrer que :

$$z^3 + \left(1 - 2\cos\frac{\pi}{12}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)z^2 - \left(2\cos\frac{\pi}{12}e^{i\frac{\pi}{4}} - i\right)z + i = (z+1)\left(z^2 - 2\cos\frac{\pi}{12}e^{i\frac{\pi}{4}}z + i\right)$$

c) Résoudre alors l'équation (E).

3) Soit A , B et C les points d'affixes respectives $a = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$; $b = -1$ et $c = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

On désigne par H le milieu de $[AB]$ d'affixe z_H

a) Montrer que $z_H = \sin\frac{\pi}{12}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ en déduire que $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) Montrer que H est le milieu de $[OC]$.

c) Montrer alors que $OACB$ est un losange.

4) Ci-dessous on a placé les points A et B sur le cercle (C) de centre O et de rayon 1.

c) Construire le cercle (C') de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$