Equations à coefficients Complexes 4ème Mathématiques

Dans tous les exercices le plan P complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 1

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (\sqrt{3} + i)z + 2 + 2\sqrt{3}i = 0$

2) Soient les points A et B d'affixes respectives : $2i$ et $\sqrt{3} - i$

a) Ecrire sous forme trigonométrique les complexes $2i$ et $\sqrt{3} - i$

b) Placer dans le plan les points A et B

3) a) Déterminer l'affixe du point C tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$.

b) Montrer que le point C appartient au cercle de centre O et passant par A

c) Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un losange

Exercice 2

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2iz - (1 + a^2) = 0$ où a est un paramètre complexe.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E), on notera par z_1 et z_2 ses solutions.

b) Montrer que $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow a \in R$.

2) Soient les points A, B, M, N et I d'affixes respectives 1 ; $-1 + 2i$; $i + a$; $i - a$ et i.

a) Montrer que M et N sont symétriques par rapport au point I.

b) Montrer que lorsque $M \notin (AB)$ AMBN est un parallélogramme.

3) On suppose que $a = e^{i\theta} + 1 - i$; où $\theta \in [0, 2\pi]$

a) Montrer que lorsque θ varie ; le point M varie sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 1.

Exercice 3

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2e^{i\alpha}z + 2e^{i2\alpha} = 0$ où α est un réel tel que $\alpha \in [0, \pi]$.

2) Ecrire les solutions trouvées sous forme exponentielle.

3) On désigne par A et B les points d'affixes respectives : $z_1 = (1 - i)e^{i\alpha}$ et $z_2 = (1 + i)e^{i\alpha}$

a) Calculer : $\frac{z_2}{z_1}$

b) En déduire que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O.

4) Montrer que : $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}) \equiv \alpha + \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

5) Déterminer la valeur de α pour que la droite $(AB)//\Delta$ tel que : Δ: $y = x$.

Exercice 4

1) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_1) : $z^2 + (1+3i)z - 4 = 0$

a) Vérifier que : $1 - i$ est une solution de (E_1).

b) Déterminer alors l'autre solution de (E_1).

2) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_2) : $z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = 0$

a) Montrer que l'équation (E_2) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_2).

3) on considère les points A B et C d'affixes respectives $a = 2i$; $b = 1 - i$ et $c = -2 - 2i$

a) Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe : $\frac{b-c}{b-a}$

b) En déduire que le triangle BAC est rectangle, isocèle en B et direct.

Exercice 5

1) a) Déterminer le module et un argument du complexe : $-2\sqrt{3} - 2i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 = -2\sqrt{3} - 2i$ on donnera les solutions sous la forme exponentielle

2) Soit $u = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

a) Calculer u^2

b) En déduire le module et un argument de u.

Exercice 6

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $iz^2 - 3iz + 3i - 1 = 0$.

2) Pour tout $z \in C$ on pose : $f(z) = iz^3 + (1-3i)z^2 - (4-3i)z + 3 + i$

a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une unique solution imaginaire pure à déterminer

b) Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que : $\forall z \in C$;

$f(z) = (z - i)(az^2 + bz + c)$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

3) a) Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe : $1 + i\sqrt{3}$.

b) En déduire la forme exponentielle de chacun des complexes suivants :

$3 + i\sqrt{3}$ et $2i - (1 + i\sqrt{3})$

Exercice 7

Soient A , B , M , M_1 , M_2 et M' les points d'affixes respectives 1 , 2 , z , $z_1 = 2z$, $z_2 = z^2$ et $z' = 2z - z^2$ où z est un nombre complexe tel que $z \in C^*\backslash\{2\}$

1) a) Montrer que (O , M_1 et M_2 sont alignés) si et seulement si (z est un réel)

b) On suppose que $\notin R$, vérifier que le quadrilatère $OM'M_1M_2$ est un parallélogramme

2) Résoudre dans C l'équation $2z - z^2 = 1 + e^{i2\theta}$ où $\theta \in R$

3) a) Montrer que $arg\ arg\ (z') - 2arg(z) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{MB}}\right) [2\pi]$

b) En déduire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tel que

$arg\ arg\ (z') - 2arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

4) Dans la suite de l'exercice $M(z)$ est un point du cercle trigonométrique (C) tel que $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, \pi[$

a) Montrer que $\frac{z'-1}{z} \in R$

b) Montrer que $MM' = AM$

c) En déduire que M' est le symétrique de A par rapport à la droite Δ tangente à (C) en M

d) Pour $\theta = \frac{2\pi}{3}$ construire le parallélogramme $OM'M_1M_2$

Exercice 8

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E): $z + \frac{1}{z} = 2\ cos\ cos\ \theta$; $\theta \in]0, \pi[$.

On notera α et β les solutions de (E).

2) On considère les points A et B d'affixes respectives α et β

a) Placer les points A et B

b) Pour quelle(s) valeur(s) de θ le triangle OAB est-il équilatéral ?

3) Soit $n \in N$

a) Calculer $\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}$ en fonction de θ

b) Quelle est la partie réelle de $(1+\alpha)^n$?

Exercice 9

Soit dans C l'équation (E): $z^2 - \left(2i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right) z - 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 0$

1) a) Vérifier que $e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et que $e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}} = i\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

b) Vérifier alors que $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ est une solution de l'équation (E)

c) Trouver alors l'autre solution z_2 de l'équation (E)

d) Ecrire chacun des nombre complexe z_1 et z_2 sous forme cartésienne

2) On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = -\sqrt{3} + i$

a) Vérifier que $z_B = iz_A$

b) Déduire que le triangle OAB est isocèle rectangle

c) Construire les points A et B

3) Soit C le point d'affixe $z_C = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})$

a) Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un carré

b) Placer le point C

c) Déterminer la forme exponentielle de z_C.

Exercice 10

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): z^2 - z + 1 = 0$

b) Mettre les solutions de (E) sous forme exponentielles.

c) En déduire les solutions de l'équation $(E'): z^4 - z^2 + 1 = 0$

2) Mettre le polynôme $p(z) = z^4 - z^2 + 1$ sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

3) On désigne par A, B, C et D les images des solutions de l'équation (E') telles que : $Re(z_A) > 0$; $Im(z_A) > 0$; $Re(z_B) > 0$ et $Im(z_D) > 0$.

a) Placer les points A, B, C et D.

b) Déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 11

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (5-4i)z - 3 - 15i = 0$.

On désigne par A, B, A'et B' les points d'affixes respectifs : $-3i$; $5-i$; -3 et $1+5i$.

2) a) Placer les points A, B, A'et B'

b) Montrer que OAA' et OBB' sont des triangles rectangles et isocèles.

3) Soit M un point de la droite (AB) d'affixe z_M.

a) Montrer qu'il existe un réel k tel que $z_M = 5k + (2k-3)i$.

b) Montrer que les droites (OM) et $(A'B')$ sont perpendiculaires si et seulement si le point M est le milieu du segment $[AB]$.

Vérifier que dans ce cas on a : $A'B' = 2OM$.

Exercice 12

Soit le nombre complexe $u = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} i$

1) a) Ecrire u^2 sous la forme exponentielle.

b) En déduire l'écriture exponentielle de u.

2) Donner les valeurs exactes de $cos\,cos\,\frac{\pi}{12}$ et $sin\,sin\,\frac{\pi}{12}$

3) a) Construire les points A et B d'affixes respectives u et iu^2.

b) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixes z tel que $arg\left(\frac{iz+u^2}{z-u}\right) \equiv -\frac{11\pi}{12}\,[2\pi]$

c) Vérifier que O appartient à E puis tracer E.

Exercice 13

1) a) Donner la forme exponentielle du complexe $4\sqrt{2}(-1+i)$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$

2) $soit\ \theta \in]0\,,\frac{\pi}{2}[.\ Montrer\ que : \dfrac{2z-1}{z} = 2e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}i\,cotan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(2z-1)^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)z^3$

Exercice 14

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+i)z + i = 0$

2) Soit θ un réel de l'intervalle $]0\,,\frac{\pi}{2}[$ on considère l'équation dans $\mathbb{C}$; (E_θ): $z^2 - 2e^{i\theta}$ $cos\,cos\,\theta\, z + e^{2i\theta} = 0$

a) Vérifier que 1 est solution de l'équation (E_θ).

b) En déduire l'autre solution de (E_θ).

3) On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et $e^{2i\theta}$.

a) Déterminer l'ensemble des points B quand θ varie dans l'intervalle $]0\,,\frac{\pi}{2}[$.

b) Déterminer l'affixe du point C tel que $OACB$ est un losange.

c) Déterminer les réels θ pour que la mesure de l'aire du losange $OACB$ soit égale à $\frac{1}{2}$

Exercice 15

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
$(1+i)z^2 - 2z + 1 - i = 0$

2) Soit m un nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et dont un argument est α.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $mz^2 - 2z + m = 0$, où m est le nombre complexe conjugué de m .

3) a) Montrer que les racines z' et z'' de l'équation (E) s'écrivent sous la forme :

$z' = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$ et $z'' = e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$

b) On désigne par M' et M'' les points d'affixes respectives z' et z'' et par M le point d'affixe $z' + z''$

Montrer que $\frac{z'}{z''} = i$. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM''}$ sont orthogonaux

c) Montrer que le quadrilatère $OM'MM''$ est un carré.

Exercice 16

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1 - 2i)z - 2i = 0$

2) Soit θ un réel. On considère l'équation $(E_\theta): z^2 + (1 - 2e^{i\theta})z - 2e^{i\theta} = 0$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

On désigne par z_1 la solution indépendante de θ et par z_2 l'autre solution.

3) On considère les points A et M d'affixes respectives z_1 et z_2.

Soit J le milieu de $[AM]$. On désigne par z_J l'affixe de J.

a) Vérifier que pour tout réel θ on a : $z_1 + \frac{1}{2} = e^{i\theta}$.

b) Déterminer l'ensemble des points J lorsque θ varie dans l'intervalle $[0\,,2\pi[$.

c) Déterminer les valeurs de θ dans l'intervalle $[0\,,2\pi[$ pour lesquels les points O A et J sont alignés.

Exercice 17

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$.

2) Soit $\theta \in]-\pi\,,\pi[$ et soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 2(1 + cos\, cos\, \theta\,)z + 2(1 + cos\, cos\, \theta\,) = 0$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

b) Ecrire ses solutions z' et z'' sous forme trigonométrique.

3) On désigne par M' et M'' les points d'affixes respectives z' et z''

En déduire que lorsque θ varie dans $]-\pi\,,\pi[$ les deux points M' et M'' appartiennent à un même cercle que l'on précisera

4) Dans cette question on suppose que $\theta = \frac{\pi}{2}$

a) Calculer z' et z'' (On désigne par z' la solution dont la partie imaginaire est positive)

b) Déterminer et construire les ensembles suivants :

$E = \{M(z)/|z - z'| = |z - z''|\}$ et $F = \{M(z)/|z - z'| = 2|z - z''|\}$

Exercice 18

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3z + 3 - i = 0$

2) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$

a) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle.

b) Trouver les nombres complexes a, b et c tel que : $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = (z + 1)(az^2 + bz + c)$

c) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

3) Soient les points A, B et C d'affixes respectives : -1 ; $1 - i$ et $2 + i$

a) Placer les points A, B et C

b) Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

c) Déterminer l'affixe du point D pour que $ABCD$ soit un carré.

Exercice 19

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

b) Ecrire les solutions trouvées sous la forme exponentielle

c) En déduire les solutions de l'équation : $z^4 - 2\sqrt{3}z^2 + 4 = 0$

2) Soit l'équation (E): $z^3 + 2(i - \sqrt{3})z^2 + 4(1 - i\sqrt{3})z + 8i = 0$

a) Vérifier $-2i$ est une solution de (E)

b) On pose $P(z) = z^3 + 2(i - \sqrt{3})z^2 + 4(1 - i\sqrt{3})z + 8i$

Déterminer les complexes a, b et c tel que $\forall z \in C$; $P(z) = (z + 2i)(az^2 + bz + c)$.

c) Résoudre alors l'équation (E).

3) Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_0 = -2i$; $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$

a) Placer les points A, B et C

b) Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.

Exercice 20

1) a) Résoudre, dans C, l'équation : $z^2 - i(2 - e^{i\theta})z - 1 + e^{i\theta} = 0$ avec $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

b) Ecrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.

2) Soient les points (1) , $B(i)$ et le cercle (C) de centre B et de rayon 1 et $M(z)$ un point de (C)

Faire une figure que l'on complètera dans la suite de l'exercice

3) Soit l'application $f : P\backslash\{B\} \rightarrow P\backslash\{A\}$ qui à tout $M(z)$ associe le point $M'(z')$ telle que $z' = \frac{\underline{z}-i}{\underline{z}+i}$

a) Soit N le point d'affixe $z_N = i - ie^{i\theta}$

Déterminer et Construire l'ensemble des points N lorsque θ varie dans $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

b) Montrer que f n'admet aucun point invariant.

4) a) Vérifier que pour tout $z \neq i$, on a : $z' - 1 = \frac{-2i}{\underline{z}+i}$

b) En déduire que $\forall M \in P\backslash\{B\}$, on a $AM'.BM = 2$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM'}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

d) Construire le point M' image du point M par f

5) Soit l'équation (E): $\left(\underline{z} - i\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\left(\underline{z} + i\right)^3$

a) Montrer que si z est une solution de (E) alors z est réel.

b) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$

c.) Montrer que $z' = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = -\, cot\, cot \left(\frac{\theta}{2}\right)$

d) Résoudre alors (E).

Exercice 21

1) a) Déterminer les racines sixièmes de l'unité.

b) Calculer $(1+i)^6$ puis montrer que : $z^6 = -8i$ si et seulement si $\left(\frac{z}{1+i}\right)^6 = 1$

c) En déduire les racines sixièmes de $-8i$

2) On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$; $f(z) = z^5 + (1+i)z^4 + 2iz^3 + (-2+2i)z^2 - 4z - 4 - 4i$

a) Vérifier que pour tout $\in \mathbb{C}$, on a : $f(z)(z-1-i) = z^6 + 8i$

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

Exercice 22

Soit θ un réel de l'intervalle $]0, \pi[$ et soit (E_θ): $z^2 - (1+i)\left(i + e^{i\theta}\right)z + i\left(i + e^{i\theta}\right)^2$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

2) Soient les points M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_1 = cos\, cos\, \theta + i(1 + sin\, sin\, \theta)$ et $z_2 = -1 - sin\, sin\, \theta + i\, cos\, cos\, \theta$

a) Ecrire z_1 sous la forme exponentielle.

b) En déduire l'écriture exponentielle de z_2.

c) Montrer que le triangle OM_1M_2 est isocèle rectangle en O.

d) Déterminer l'affixe du point M pour que le quadrilatère OM_1MM_2 soit un carré.

3) Soit A le point d'affixe $-1+i$

a) Montrer que : $\frac{aff(\overrightarrow{AM_1})}{aff(\overrightarrow{AM_2})} = -\,cot\,cot\,\frac{\theta}{2}$

b) En déduire que les points , M_1 et M_2 sont alignés.

3) Déterminer et construire l'ensemble des points M_1 d'affixe z_1 lorsque θ décrit $]0\,,\pi[$.

Exercice 23

Soit m un réel non nul.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2iz - (1+m^2) = 0$.

2) Pour tout complexe z, on pose : $f(z) = z^3 - 3iz^2 - (3+m^2)z + i(1+m^2)$.

a) Vérifier que $f(i) = 0$ et en déduire une factorisation de $f(z)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = 0$.

3) On considère les points A, M' et M'' d'affixes respectives : i , $i+m$ et $i-m$.

a) Vérifier que A est le milieu du segment $[M'M'']$.

b) Montrer que le triangle $OM'M''$ est isocèle.

c) Déterminer les valeurs de m pour que le triangle $OM'M''$ soit équilatéral.

Exercice 24

Soit $f(z) = z^2 - 9\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - 81\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ avec $z \in C$

1) Calculer $f(9)$. En déduire les solutions de l'équation $f(z) = 0$

2) a) Résoudre dans C l'équation (E) : $z^8 - 9\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z^4 - 81\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

b) Ecrire les solutions sous la formes exponentielle

3) Parmi les solutions de l'équation (E) on trouve les deux solutions $a = i\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Soit $\lambda = r(cos\,cos\,\theta\ + i\,sin\,sin\,\theta\ )$ avec $\theta \in]0,\pi[$ et $r > 0$

a) Déterminer r et θ pour que les 3 nombres complexes a , λ et b soient, dans cet ordre, les 3 termes consécutifs d'une suite géométrique (U_n) , $n \in IN$

b) Déterminer alors la raison q de cette suite

c) Déterminer le module et un argument de (U_n)

c) Pour quelles valeurs de n , U_n est un réel ?

4) Soit $M(z)$ avec $z \in C$, Déterminer l'ensemble des points M tel que $bz^2 - a|z|^2 = 0$.

Exercice 25

Soit m un nombre complexe non nul tel que : $|m| = r > 0$ et $Arg(m) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$. On désigne par M et A les points d'affixes respectifs m et 1.

1) Donner la forme exponentielle de $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

2) Déterminer r pour que $AM = 1$.

3) Soit l'équation $(E_m) : mz^2 - (1+i)z + \frac{\sqrt{3}+i}{2\overline{m}} = 0$. On désigne par M_1 et M_2 les images respectifs des nombres complexes z_1 et z_2 solutions de l'équation (E_m).

a) Sans résoudre l'équation (E_m), montrer que $Arg(z_1 + z_2) \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$.

b) Montrer que $m\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2\overline{m}}\right) = i$

c) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m).

d) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

4) Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle et isocèle en O.

5) Dans la suite de l'exercice M est un point du cercle trigonométrique.

a) Soit $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi\}$; $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\frac{i-z}{i+z} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E'_m) : m\left(\frac{i-z}{i+z}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2\overline{m}}\right)\left(\frac{i-z}{i+z}\right)^2 = 1 + i$.

Exercice 26

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - (1+i)z - i = 0$

Résoudre l'équation (E). On note z_1 et z_2 les solutions de (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A, B, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives : 1 , i , z_1 et z_2 .

Soit z un nombre complexe distinct de 1 , i , z_1 et z_2 .

On note M et M' les points d'affixes respectives z et $z' = \frac{z+i}{z-i}$

Justifier que les points M et M' sont distincts.

Dans la suite de l'exercice on prend $z = i + 2e^{i\theta}$, où θ est un réel.

3) a) Montrer que M décrit le cercle Γ de centre B et de rayon 2.

b) Montrer que $z' = 1 + ie^{-i\theta}$

c) Montrer que $AM' = 1$ et que $(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AM'}}) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta\ [2\pi]$.

d) Déterminer l'ensembles des points M' lorsque le point M décrit le cercle Γ.

4) Soit P le milieu du segment $[MM']$ et z_P son affixe.

On désigne par Q le point d'affixe $z_Q = e^{i\frac{\pi}{4}} z_P$

a) Vérifier que : $z_P = \frac{1+i+2e^{i\theta}+ie^{-i\theta}}{2}$

b) En déduire que $z_Q = \frac{i\sqrt{2}+2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}-e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}}{2}$

c) Montrer alors que $z_Q = \frac{1}{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{6}{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

5) Montrer que lorsque le point M varie sur le cercle Γ, alors les coordonnées du point $Q(x\,,y)$ vérifient l'équation suivante : $4x^2 + \frac{9}{4}\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$

Exercice 27

Pour tout réel $\theta \in]-\pi\,,\pi]$, on considère la fonction f_θ définie sur $\mathbb{C}\backslash\{e^{i\theta}\}$ par : $f_\theta(z) = \frac{1+ze^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}$

1) Vérifier que si $\theta \in \left\{-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right\}$ alors $e^{i\theta}$ est invariant par f_θ.

2) On pose $\theta = 0$.

a) Montrer que pour tout nombre complexe z et z' de $\mathbb{C}\backslash\{-1\,,1\}$

$f_0(z) = z'$ si et seulement $z = -f_0(-z')$

b) Montrer que pour tout $\alpha \neq 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \neq \pi + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$ on a : $f_0(e^{i\alpha}) = \frac{i}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

c) Déterminer les racines carrées de $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

d) Utiliser les questions a) b) et c) pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(1+z)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1-z)^2$.

3) On suppose que $\theta \in]-\pi\,,\pi]\backslash\left\{-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right\}$. on désigne par A , B , M et M' les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$, $-e^{-i\theta}$, z et $z' = f_\theta(z)$

a) Montrer que tout $M \neq A$ et $M \neq B$ on a : $(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{OM'}}) \equiv \theta + \pi + (\widehat{\overrightarrow{MA}\,,\overrightarrow{MB}})\ [2\pi]$

b) pour $= \frac{\pi}{4}$, déterminer et construire l'ensemble Γ des points M lorsque M' décrit la demi-droite d'équation : $\begin{cases} y = -x \\ x > 0 \end{cases}$