Dans tous les exercices l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Exercice 1

On considère les points $A(1\,,-2\,,-1)$, $B(3\,,-3\,,-2)$ et $C(0\,,-3\,,1)$,

1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

b) Donner un système d'équations cartésiennes de la droite (AB).

2) a) Montrer que les points A, B et C forment un plan P.

b) Donner une représentation paramétrique de P.

c) Donner une équation cartésienne de P

3) Donner une équation cartésienne du plan Q parallèle à P et passant par $D(1\,,1\,,1)$.

4) Soit le plan $P' : -x + 2y - 2z + 4 = 0$.

Montrer que P et P′ sont sécants et donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

Exercice 2

Soit les points $A(0\,,-1\,,1)$, $B(2\,,1\,,3)$ et la droite Δ: $\begin{cases} x = \alpha \\ y = -2 + 2\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

1) Montrer que les droites Δ et (AB) sont sécantes en un point I que l'on précisera.

2) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ' passant par A et parallèle à Δ .

3) Soit le point $C(1\,,1\,,2)$.

a) Montrer que C n'appartient pas à la droite Δ.

b) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ_1 passant par le point C et parallèle à la droite Δ .

4) a) Donner une représentation paramétrique du plan P contenant les droites Δ' et Δ .

b) Donner une équation cartésienne de P.

Exercice 3

On considère les points $A(-1\,,0\,,2)$, $B(3\,,2\,,-4)$, $C(1\,,-4\,,2)$ et $D(3\,,2\,,0)$.

On considère les points I , J et K définies par I milieu de $[AB]$, K milieu de $[CD]$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

1) Déterminer les coordonnées des points I , J et K.

2) a) Montrer que les points I , J et K ne sont pas alignés.

b) Justifier qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $8x + 9y + 5z - 12 = 0$.

c) Déterminer une représentation paramétrique du plan (IJK) .

3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD).

b) Donner un système d'équations cartésiennes de la droite (AD).

4) a) Montrer que la droite (AD) et le plan (IJK) sont sécants en un point L.

b) Montrer que $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

Exercice 4

On considère les points $A(0\,,1\,,-5)$, $B(-1\,,-2\,,-1)$, $C(1\,,0\,,-5)$.

1) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P.

b) Justifier qu'une équation cartésienne du plan P est : $x + y + z + 4 = 0$.

c) Déterminer une représentation paramétrique du plan .

2) Soit la droite $D:\begin{cases} x = 1-\alpha \\ y = 2+3\alpha \\ z = -4+\alpha \end{cases}$; $\alpha \in IR$

a) Montrer que le plan P et la droite D sont sécants.

b) Déterminer les coordonnées du point I intersection du plan P et la droite D.

3) Soit le plan : $2x - y + 3z - 1 = 0$.

a) Montrer que les plans P et Q sont sécants.

b) Soit Δ l'intersection de P et Q, donner une représentation paramétriques de Δ .

c) Etudier la position relative de D et Δ .

Exercice 5

On considère les points $A(1,-2,-1)$, $B(3,-3,-2)$ et $C(0,-3,1)$

1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

b) Donner un système d'équations cartésiennes de la droite (AB).

2) a) Montrer que les points A, B et C forment un plan P.

b) Donner une représentation paramétrique de P.

c) Donner une équation cartésienne de P.

3) Donner une équation cartésienne du plan Q parallèle à P et passant par $D(1,1,1)$

4) Soit le plan $P' : -x + 2y - 2z + 4 = 0$ Montrer que P et P' sont sécants et donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

Exercice 6

On considère les droites : $D : \begin{cases} x = 2+\alpha \\ y = 1+2\alpha \\ z = 1-\alpha \end{cases}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ et $D' : \begin{cases} x = 4+3\beta \\ y = 3+\beta \\ z = 3+2\beta \end{cases}$ $\beta \in \mathbb{R}$

1) Montrer que les droites D et D' ne sont pas coplanaires.

2) a) Le point $A(4,-7,5)$ appartient-il à la droite D ?

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P passant par le point A et contenant la droite D est : $y + 2z - 3 = 0$

3) a) Déterminer le réel m pour que le vecteur $\vec{u}_m = \vec{i} + \vec{j} + m\vec{k}$ soit un vecteur du plan P.

b) Déterminer la position relative de la droite $\Delta = D(A, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ avec le plan P.

4) Déterminer $D' \cap P$.

5) Soit les plans $P_1 : x - 4y + 7 = 0$ et $P_2 : x - 2z + 5 = 0$.

a) Vérifier que P_1 et P_2 sont sécants.

b) Trouver une représentation paramétrique de leur droite D_1 d'intersection.

Exercice 7

Soient les droites $D_1 : \begin{cases} x = -1+\alpha \\ y = -\alpha \\ z = 1+\alpha \end{cases}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ et $D_2 : \begin{cases} x = -\beta \\ y = 1+\beta \\ z = 2-\beta \end{cases}$ $\beta \in \mathbb{R}$

1) Etudier la position relative des droites D_1 et D_2.

2) Soit P le plan contenant à la fois les droites D_1 et D_2.

Montrer qu'une équation cartésienne de P est : $x - z + 2 = 0$.

3) Déterminer le réel m pour que le vecteur $\vec{u}_m = \vec{i} + \vec{j} + m\vec{k}$ soit un vecteur de P.

4) Soit le point $A(-1\,,0\,,1)$. Déterminer dans chacun des cas, la position relative de la droite Δ avec le plan P.

a) $\Delta = D\left(A\,,\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)$

b) $\Delta = D\left(A\,,\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\right)$

c) $\Delta = D\left(O\,,\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\right)$

5) On considère les plans $P_1 : x+z=0$ et $P_2 : x-z=0$

a) Vérifier que P_1 et P_2 sont sécants.

b) Soit $= P_1 \cap P_2$. Trouver une représentation paramétrique de la droit D.

c) Etudier la position relative de P_1 et D.

Exercice 8

Soient les points $A(1\,,2\,,2)$, $B(3\,,2\,,1)$ et $C(1\,,3\,,3)$.

1) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P.

b) Donner une équation cartésienne de P.

2) Soient les plans $P_1 : x-2y+2z-1=0$ et $P_2 : x-3y+2z+2=0$.

a) Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite D.

b) Montrer que le point C appartient à la droite D.

c) Montrer que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite D.

d) En déduire que la droite D a pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=1+2\alpha\\y=3\\z=3-\alpha\end{cases}$ $\alpha \in \mathbb{R}$.