

Dans tous les exercices l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Exercice 1

On considère les points $A(1, -2, -1)$, $B(3, -3, -2)$ et $C(0, -3, 1)$,

- 1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .
b) Donner un système d'équations cartésiennes de la droite (AB) .
- 2) a) Montrer que les points A , B et C forment un plan P .
b) Donner une représentation paramétrique de P .
c) Donner une équation cartésienne de P .
- 3) Donner une équation cartésienne du plan Q parallèle à P et passant par $D(1, 1, 1)$.
- 4) Soit le plan $P' : -x + 2y - 2z + 4 = 0$.

Montrer que P et P' sont sécants et donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

Exercice 2

Soit les points $A(0, -1, 1)$, $B(2, 1, 3)$ et la droite $\Delta : \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2 + 2\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$

- 1) Montrer que les droites Δ et (AB) sont sécantes en un point I que l'on précisera.
- 2) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ' passant par A et parallèle à Δ .
- 3) Soit le point $C(1, 1, 2)$.
a) Montrer que C n'appartient pas à la droite Δ .
b) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ_1 passant par le point C et parallèle à la droite Δ .
- 4) a) Donner une représentation paramétrique du plan P contenant les droites Δ' et Δ .
b) Donner une équation cartésienne de P .

Exercice 3

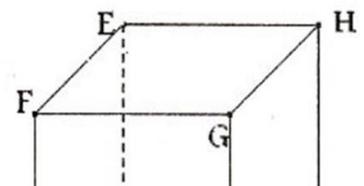
On considère les points $A(-1, 0, 2)$, $B(3, 2, -4)$, $C(1, -4, 2)$ et $D(3, 2, 0)$.

On considère les points I, J et K définies par I milieu de $[AB]$, J milieu de $[CD]$ et $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BC}$

- 1) Déterminer les coordonnées des points I, J et K .
- 2) a) Montrer que les points I, J et K ne sont pas alignés.
b) Justifier qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $8x + 9y + 5z - 12 = 0$.
c) Déterminer une représentation paramétrique du plan (IJK) .
- 3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD) .
b) Donner un système d'équations cartésiennes de la droite (AD) .
- 4) a) Montrer que la droite (AD) et le plan (IJK) sont sécants en un point L .
b) Montrer que $\vec{AL} = \frac{1}{4}\vec{AD}$.

Exercice 4

La figure ci-contre est celle d'un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1



1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est égale à :

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) 1 c) $\sqrt{2}$

2) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est égale à :

- a) \overrightarrow{AE} b) \overrightarrow{EA} c) $\frac{\sqrt{2}}{2} \overrightarrow{AE}$

Exercice 5

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un parallélépipède tel que $AB = 2, AD = AE = 1$.

On désigne par I le milieu de $[AB]$

On munit l'espace du repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1) Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE}$ est égal à

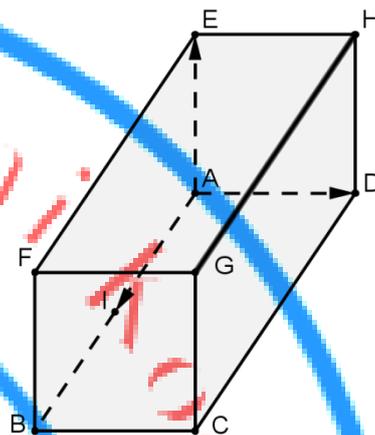
- a) $2\overrightarrow{AD}$ b) $-2\overrightarrow{AD}$ c) \overrightarrow{DA}

2) L'intersection des plans d'équations $y = 1$ et $z = 1$ est la droite

- a) (FG) b) (DG) c) (GH)

3) Une équation du plan (AHG) est

- a) $y - z = 0$ b) $y + z = 0$ c) $y + z - 2 = 0$



Exercice 6

On considère les points $A(0, 1, -5), B(-1, -2, -1), C(1, 0, -5)$.

1) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P .

b) Justifier qu'une équation cartésienne du plan P est $:x + y + z + 4 = 0$.

c) Déterminer une représentation paramétrique du plan .

2) Soit la droite $D: \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = -4 + \alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$

a) Montrer que le plan P et la droite D sont sécants.

b) Déterminer les coordonnées du point I intersection du plan P et la droite D .

3) Soit le plan : $2x - y + 3z - 1 = 0$.

a) Montrer que les plans P et Q sont sécants.

b) Soit Δ l'intersection de P et Q donner une représentation paramétriques de Δ .

c) Etudier la position relative de D et Δ .

Exercice 7

On considère les points $(1, -2, -1), B(3, -3, -2)$ et $C(0, -3, 1)$

1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .

b) Donner un système d'équations cartésiennes de la droite (AB) .

2) a) Montrer que les points A, B et C forment un plan P .

b) Donner une représentation paramétrique de P .

c) Donner une équation cartésienne de P .

- 3) Donner une équation cartésienne du plan Q parallèle à P et passant par $D(1, 1, 1)$
- 4) Soit le plan $P' : -x + 2y - 2z + 4 = 0$ Montrer que P et P' sont sécants et donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

Exercice 8

On considère les droites : $D : \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$ et $D' : \begin{cases} x = 4 + 3\beta \\ y = 3 + \beta \\ z = 3 + 2\beta \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R}$

- 1) Montrer que les droites D et D' ne sont pas coplanaires.
- 2) a) Le point $A(4, -7, 5)$ appartient-il à la droite D ?
b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P passant par le point A et contenant la droite D est : $y + 2z - 3 = 0$
- 3) a) Déterminer le réel m pour que le vecteur $\vec{u}_m = \vec{i} + \vec{j} + m\vec{k}$ soit un vecteur du plan P .
b) Déterminer la position relative de la droite $\Delta = D(A, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ avec le plan P .
- 4) Déterminer $D' \cap P$.
- 5) Soit les plans $P_1 : x - 4y + 7 = 0$ et $P_2 : x - 2z + 5 = 0$.
a) Vérifier que P_1 et P_2 sont sécants.
b) Trouver une représentation paramétrique de leur droite D_1 d'intersection.

Exercice 9

Soient les droites $D_1 : \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = -\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$ et $D_2 : \begin{cases} x = -\beta \\ y = 1 + \beta \\ z = 2 - \beta \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R}$

- 1) Etudier la position relative des droites D_1 et D_2 .
- 2) Soit P le plan contenant à la fois les droites D_1 et D_2 .
Montrer qu'une équation cartésienne de P est : $x - z + 2 = 0$.
- 3) Déterminer le réel m pour que le vecteur $\vec{u}_m = \vec{i} + \vec{j} + m\vec{k}$ soit un vecteur de P .
- 4) Soit le point $A(-1, 0, 1)$. Déterminer dans chacun des cas, la position relative de la droite Δ avec le plan P .
a) $\Delta = D(A, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$
b) $\Delta = D(A, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$
c) $\Delta = D(O, \vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$
- 5) On considère les plans $P_1 : x + z = 0$ et $P_2 : x - z = 0$
a) Vérifier que P_1 et P_2 sont sécants.
b) Soit $D = P_1 \cap P_2$. Trouver une représentation paramétrique de la droite D .
c) Etudier la position relative de P_1 et D .

Exercice 10

Soient les points $A(1, 2, 2)$, $B(3, 2, 1)$ et $C(1, 3, 3)$.

- 1) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P .
b) Donner une équation cartésienne de P .
- 2) Soient les plans $P_1 : x - 2y + 2z - 1 = 0$ et $P_2 : x - 3y + 2z + 2 = 0$.
a) Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite D .
b) Montrer que le point C appartient à la droite D .

c) Montrer que le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite D .

d) En déduire que la droite D a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 3 \\ z = 3 - \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

Exercice 11

On considère les points : $A(4, 0, 0)$, $B(0, 0, 4)$ et $C(0, 4, 0)$.

1) a) Calculer $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ et en déduire que les points A , B et C déterminent un plan P .

b) Montrer qu'une équation cartésienne de P est $x + y + z - 4 = 0$

2) Soit $S = \{M(x, y, z) \in E / x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 4z = 0\}$

a) Montrer que S est une sphère de centre $I(0, 2, 2)$ et de rayon $R = 2\sqrt{2}$.

b) Vérifier que $[BC]$ est un diamètre de S .

c) Soit K le milieu du segment $[AC]$. Calculer $\vec{KB} \cdot \vec{KC}$ et en déduire que $K \in S$.

d) En déduire que P coupe S suivant un cercle C_1 que l'on caractérisa.

3) Soit Q le plan passant par K et perpendiculaire à la droite (BC) .

a) Montrer qu'une équation cartésienne de Q est $y - z - 2 = 0$.

b) Vérifier alors que $H(0, 3, 1)$ est le projeté orthogonal de K sur la droite (BC) .

4) a) Montrer que la distance du point K à la droite (BC) est égale à $\sqrt{6}$.

b) En déduire que Q coupe S suivant un cercle C_2 dont on précisera le centre et le rayon.

5) En déduire l'intersection de C_1 et C_2 .