

Dans tous les exercices l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Exercice 1

On considère les points $A(1, -2, -1)$, $B(3, -3, -2)$ et $C(0, -3, 1)$,

- 1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .
b) Donner un système d'équations cartésiennes de la droite (AB) .
- 2) a) Montrer que les points A , B et C forment un plan P .
b) Donner une représentation paramétrique de P .
c) Donner une équation cartésienne de P
- 3) Donner une équation cartésienne du plan Q parallèle à P et passant par $D(1, 1, 1)$.
- 4) Soit le plan $P' : -x + 2y - 2z + 4 = 0$.

Montrer que P et P' sont sécants et donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

Exercice 2

Soit les points $A(0, -1, 1)$, $B(2, 1, 3)$ et la droite $\Delta : \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2 + 2\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$

- 1) Montrer que les droites Δ et (AB) sont sécantes en un point I que l'on précisera.
- 2) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ' passant par A et parallèle à Δ .
- 3) Soit le point $C(1, 1, 2)$.
a) Montrer que C n'appartient pas à la droite Δ .
b) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ_1 passant par le point C et parallèle à la droite Δ .
- 4) a) Donner une représentation paramétrique du plan P contenant les droites Δ' et Δ .
b) Donner une équation cartésienne de P .

Exercice 3

On considère les points $A(-1, 0, 2)$, $B(3, 2, -4)$, $C(1, -4, 2)$ et $D(3, 2, 0)$.

On considère les points I, J et K définies par I milieu de $[AB]$, K milieu de $[CD]$ et $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BC}$.

- 1) Déterminer les coordonnées des points I, J et K .
- 2) a) Montrer que les points I, J et K ne sont pas alignés.

- b) Justifier qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $8x + 9y + 5z - 12 = 0$.
- c) Déterminer une représentation paramétrique du plan (IJK) .
- 3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD) .
- b) Donner un système d'équations cartésiennes de la droite (AD) .
- 4) a) Montrer que la droite (AD) et le plan (IJK) sont sécants en un point L .
- b) Montrer que $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

Exercice 4

On considère les points $A(0, 1, -5)$, $B(-1, -2, -1)$, $C(1, 0, -5)$.

- 1) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P .
- b) Justifier qu'une équation cartésienne du plan P est : $x + y + z + 4 = 0$.
- c) Déterminer une représentation paramétrique du plan .
- 2) Soit la droite $D: \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = -4 + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$
- a) Montrer que le plan P et la droite D sont sécants.
- b) Déterminer les coordonnées du point I intersection du plan P et la droite D .
- 3) Soit le plan : $2x - y + 3z - 1 = 0$.
- a) Montrer que les plans P et Q sont sécants.
- b) Soit Δ l'intersection de P et Q , donner une représentation paramétriques de Δ .
- c) Etudier la position relative de D et Δ .

Exercice 5

On considère les droites : $D : \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$ et $D' : \begin{cases} x = 4 + 3\beta \\ y = 3 + \beta \\ z = 3 + 2\beta \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R}$

- 1) Montrer que les droites D et D' ne sont pas coplanaires.
- 2) a) Le point $A(4, -7, 5)$ appartient-il à la droite D ?
- b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P passant par le point A et contenant la droite D est : $y + 2z - 3 = 0$
- 3) a) Déterminer le réel m pour que le vecteur $\vec{u}_m = \vec{i} + \vec{j} + m\vec{k}$ soit un vecteur du plan P .
- b) Déterminer la position relative de la droite $\Delta = D(A, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ avec le plan P .
- 4) Déterminer $D' \cap P$.
- 5) Soit les plans $P_1: x - 4y + 7 = 0$ et $P_2: x - 2z + 5 = 0$.

a) Vérifier que P_1 et P_2 sont sécants.

b) Trouver une représentation paramétrique de leur droite D_1 d'intersection.

Exercice 6

On considère les points $(1, -2, -1)$, $B(3, -3, -2)$ et $C(0, -3, 1)$

1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .

b) Donner un système d'équations cartésiennes de la droite (AB) .

2) a) Montrer que les points A , B et C forment un plan P .

b) Donner une représentation paramétrique de P .

c) Donner une équation cartésienne de P .

3) Donner une équation cartésienne du plan Q parallèle à P et passant par $D(1, 1, 1)$

4) Soit le plan $P' : -x + 2y - 2z + 4 = 0$ Montrer que P et P' sont sécants et donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

Exercice 7

Soient les droites $D_1 : \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = -\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$ et $D_2 : \begin{cases} x = -\beta \\ y = 1 + \beta \\ z = 2 - \beta \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R}$

1) Etudier la position relative des droites D_1 et D_2 .

2) Soit P le plan contenant à la fois les droites D_1 et D_2 .

Montrer qu'une équation cartésienne de P est : $x - z + 2 = 0$.

3) Déterminer le réel m pour que le vecteur $\vec{u}_m = \vec{i} + \vec{j} + m\vec{k}$ soit un vecteur de P .

4) Soit le point $A(-1, 0, 1)$. Déterminer dans chacun des cas, la position relative de la droite Δ avec le plan P .

a) $\Delta = D(A, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

b) $\Delta = D(A, \vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$

c) $\Delta = D(O, \vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$

5) On considère les plans $P_1 : x + z = 0$ et $P_2 : x - z = 0$

a) Vérifier que P_1 et P_2 sont sécants.

b) Soit $D = P_1 \cap P_2$. Trouver une représentation paramétrique de la droite D .

c) Etudier la position relative de P_1 et D .

Exercice 8

Soient les points $A(1, 2, 2)$, $B(3, 2, 1)$ et $C(1, 3, 3)$.

- 1) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P .
b) Donner une équation cartésienne de P .
- 2) Soient les plans $P_1 : x - 2y + 2z - 1 = 0$ et $P_2 : x - 3y + 2z + 2 = 0$.
a) Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite D .
b) Montrer que le point C appartient à la droite D .
c) Montrer que le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite D .
d) En déduire que la droite D a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 3 \\ z = 3 - \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$