Série 16 :Divisibilité

EXERCICE N°1

Soit N=$\underbrace{111\ldots\ldots 1}_{2010\, fois}$

1) Vérifier que $10^{2010}-1=9N$

2) Montrer que N est divisible par 11

2) Vérifier que 2011 est premier et que 2011 divise N

3) Montrer que N est divisible par par 22121

EXERCICE N°2

Pour tout entier naturel n non nul ,on désigne par $a_n=\underbrace{333\ldots\ldots 3}_{n\, fois}1$

1) Vérifier que a_1 et a_2 sont deux nombres premiers

2) Montrer que pour tout entier naturel n non nul $3a_n+7=10^{n+1}$

3) a) Montrer que pour tout entier naturel k $10^{30k+2}\equiv 7\ [31]$

b) Montrer que 31 divise a_{30k+1} pour tout entier naturel k

c) Montrer que si $n\equiv 1\ [30]$ alors l'équation $a_nx+31y=1$ n'admet pas de solution dans $Z\times Z$

EXERCICE N°3

Soit le nombre premier $p\geq 5$

1) Montrer que $p^2\equiv 1[3]$

2) a) Montrer qu'il existe un entier naturel q tel que $p^2-1=4q(q+1)$

b) En déduire que $p^2\equiv 1[8]$

c) Montrer que $p^2\equiv 1[24]$

3) Soit a un entier naturel tel que $a\wedge 24=1$

a) Montrer que $a^2\equiv 1[24]$

b) Existe il des entiers naturels a_1,a_2 …..et a_{23} tels que $a_k\wedge 24=1$ pour tout k$\in\{1,2\ldots\ldots,23\}$ et

$a_1^2+a_2^2+\ldots\ldots\ldots+a_{23}^2=23997$

EXERCICE N°4

on se propose de déterminer les couples (n,m) d'entiers naturels vérifiant

La relation $7^n-3\times 2^m=1$ (F) .

1) On suppose que $0\leq m\leq 4$. Montrer que l'équation (F) admet exactement deux couples solutions .

2) On suppose que $m\geq 5$

a) Montrer que si le couple (n,m) vérifie la relation (F) alors $7^n\equiv 1[32]$

b) Déterminer suivant n les restes possibles de 7^n par 32

c) En déduire que si le couple (n,m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4 ($n = 4q$ où $q\in\mathbb{N}$)

d) Montrer que si n = 4q où q ∈ ℕ alors $7^n \equiv 1[5]$

e) Montrer que si m ≥ 5 alors il n'existe pas des couples (n,m) d'entiers naturels vérifiant la relation (F)

3) Conclure

EXERCICE N°5

Pour tout entier naturel n non nul, on appelle S_n le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n .

1) Vérifier que S_6 = 12 et calculer S_7 .

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur égal à 2, $S_n \geq$ 1+n .

b) Quels sont les entiers naturels n tels que S_n = 1+n ?

3) On suppose dans cette question que n s'écrit p × q où p et q sont des nombres premiers distincts.

a) Démontrer que S_n = (1+ p)(1+ q).

b) On considère la proposition suivante : « Pour tous entiers naturels n et m non nuls distincts, $S_n \times S_m = S_{n\times m}$ ». Cette proposition est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

4. On suppose dans cette question que l'entier n s'écrit n= p^{2021} ,où p est un nombre premier strictement supérieur à 5.

a) Montrer que S_n est pair .

b) Montrer que (p-1) $S_n = p^{2022} - 1$.

c) Montrer que (p-1) $S_n \equiv p^2 - 1$ [5]

5) On suppose que n= 7^{2021}

a) Montrer que $S_n \equiv 3$ [5] .

b) Déduire le chiffre des unités de S_n .

EXERCICE N°6

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 10\, u_n + 21 \end{cases}$

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel n , $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n , 1 est le dernier chiffre de u_n.

c) Déterminer le nombre formé par les 4 derniers chiffres dans l'écriture décimale de u_{2023}.

On se propose d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains nombres premiers .

3) a) Démontrer que , pour tout entier naturel n , u_n n'est divisible ni par 2 , ni par 3 , ni par 5 , ni par 7.

b) En déduire que u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux

4) a) Démontrer que pour tout entier naturel n , $3u_n \equiv = 4 - (-1)^n\ [11]$.

b) En déduire que , pour tout entier naturel n , u_n n'est divisible par 11.

5) a) Vérifier que $10^8 \equiv -1\ [17]$.

b) Montrer que , pour tout entier naturel k , u_{16k+8} est divisible par 17.