Exercice 1

1) Soit n et a deux entiers naturels non nuls tels que a divise $21n + 3$ et a divise $14n + 9$.

Montrer que a divise 21.

2) En déduire les valeurs de a.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les congruences suivantes : $3x \equiv 6\ (mod\ 7)$ $\quad x^2 + 2x - 1 \equiv 2\ (mod\ 4)$

$2x^2 - 3x + 4 \equiv 3\ (mod\ 6)$ $\quad -2x^2 + 3x - 1 \equiv 0\ (mod\ 5)$.

Exercice 3

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7 et que $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est divisible par 11.

Exercice 4

Répondre par « Vrai » ou « Faux » tout en justifiant la réponse.

1) L'équation : $35x \equiv 9\ (mod\ 42)$ admet au moins une solution.

2) Si p est premier et si $p > 3$ alors $p^2 \equiv 1\ (mod\ 4)$.

3) $x^2 \equiv 1\ (mod\ 5)$ si et seulement si $x \equiv 1 (mod\ 5)$ ou $x \equiv 4 (mod\ 5)$.

Exercice 5

1) Une ou plusieurs réponse sont correctes. Donner la ou les réponses correctes.

$1219 \equiv x\ (mod\ 11)$ tel que $-11 < x < 11$ alors :

a) $x = -9$ b) $x = -2$ c) $x = 0$ d) $x = 9$

2) Répondre par « Vrai » ou « Faux »

a) $1458 \equiv 13\ (mod\ 17)$

b) $1458 \equiv -21\ (mod\ 17)$

c) $1458 \equiv 1450\ (mod\ 17)$

d) $1458 \equiv 1424\ (mod\ 17)$.

Exercice 8

Soit n un entier naturel.

1) Déterminer pour tout entier n de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ le reste modulo 10 de 7^n.

2) Soit S un entier naturel tel que : $S = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{400}$.

Déterminer le chiffre des unités de S.

Exercice 9

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres:

$$a = n^3 - n^2 - 12n \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 - 7n - 4$$

1) Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par n - 4.

2) On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le PGCD de α et β.

a) Établir une relation entre α et β indépendante de n.

b) Démontrer que d est un diviseur de 5.

c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si n - 2 est multiple de 5.

3) Montrer que 2n + 1 et n sont premiers entre eux.

4) **a)** Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a et b.

b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

Exercice 10

Soit $a \in \mathbb{Z}$

1) Déterminer les restes possibles modulo 6 de l'entier a^2.

2) Vérifier que $a^3 \equiv a\ (mod\ 6)$.

3) **a)** Montrer par récurrence que pour tout $a \in \mathbb{N}$, $a^{2n+1} \equiv a\ (mod\ 6)$.

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $a^{2n} \equiv a^2\ (mod\ 6)$.

4) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système $\begin{cases} x^7 - y^8 \equiv 0\ (mod\ 6) \\ x^3y^2 \equiv 1\ (mod\ 6) \end{cases}$

Exercice 11

Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2.

1) **a)** Montrer que n et $2n + 1$ sont premier entre eux.

b) En déduire que : si d est un diviseur de $2n + 1$ alors n et d sont premier entre eux.

2) On pose $\alpha = n + 3\,;\beta = 2n + 1$ et $d_1 = \alpha \wedge \beta$.

a) Calculer $2\alpha - \beta$, en déduire les valeurs possibles de d_1.

b) Démontrer que α et β sont multiples de 5 ssi $(n - 2)$ est un multiple de 5.

3) On considère les entiers naturels a et b définies par :

$$a = n^3 + 2n^2 - 3n \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 - n - 1$$

Factoriser a et b, en déduire que a et b sont divisibles par $(n - 1)$.

4) On pose $d_2 = n(n + 3) \wedge (2n + 1)$ et $\delta = a \wedge b$

a) Montrer que $d_1 = d_2$ (on pourra montrer que d_1 divise d_2 et d_2 divise d_1).

b) En déduire δ en fonction de d_1 et n.

c) Application : Déterminer δ pour $n = 2002$. Déterminer δ pour $n = 2010$.

Exercice 14

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = 7U_n + 8$

1) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $3U_n = 7^{n+1} - 4$

2) On pose $\forall n \in \mathbb{N} : S_n = 1 + 7 + 7^2 + \cdots 7^n$ et $S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots U_n$

a) Exprimer S_n en fonction de n puis trouver une relation entre S_n et S'_n

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$

3) **a)** Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, les restes modulo 5 de 7^n.

b) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour que S'_n soit divisible par 5.

Exercice 17

1) Démontrer les propositions suivantes :

a) $2^{340} \equiv 1(mod\ 11)$

b) Pour tout entier naturel n ; 9 divise $7^{3n} - 1$.

c) Pour tout entier naturel n ; $4^{4n+2} - 3^{n+3}$ est divisible par 11.

2) **a)** Donner suivant les valeurs de n les restes de la division euclidienne de 2^n par 7.

b) En déduire que si n est un multiple de 3 alors $2^{n+2} + 2^{n+1} + 1$ est divisible par 7.