

-DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2-

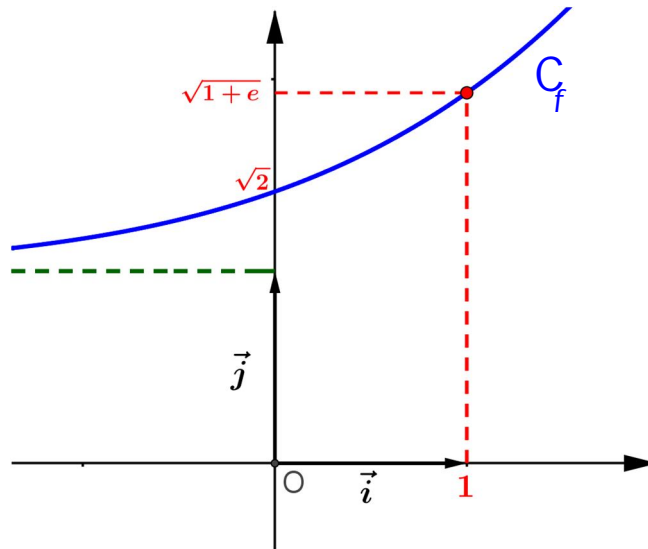
EXERCICE N°1

3 POINTS

Dans la figure ci-dessous on a représenté dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la courbe  $C_f$  d'une fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et tel que pour tout réel  $x$ , on a :

$$2f'(x) f(x) - f^2(x) + 1 = 0$$

- La droite d'équation  $y=1$  est une asymptote à  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$ .
- $C_f$  admet une branche parabolique de direction  $(O, \vec{j})$  au voisinage de  $+\infty$ .



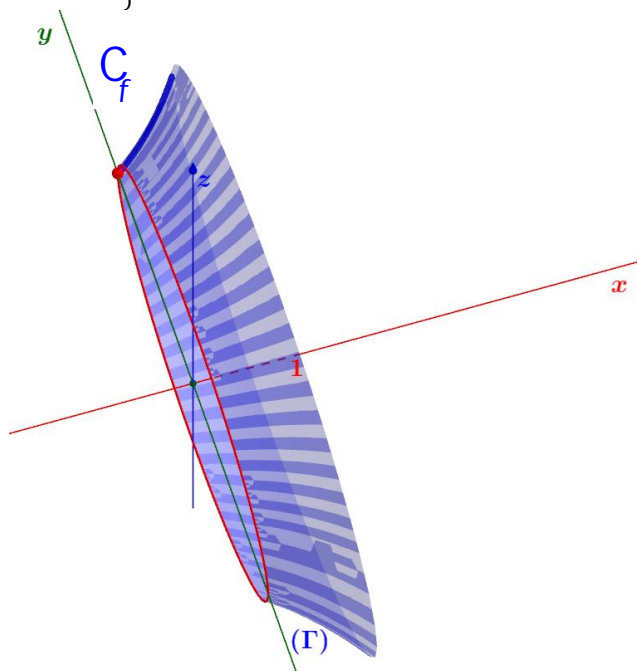
1°) Par lecture graphique déterminer :  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

2°) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $I$  que l'on précisera.

3°) Soit le volume  $V$  du solide engendré par la rotation de l'arc

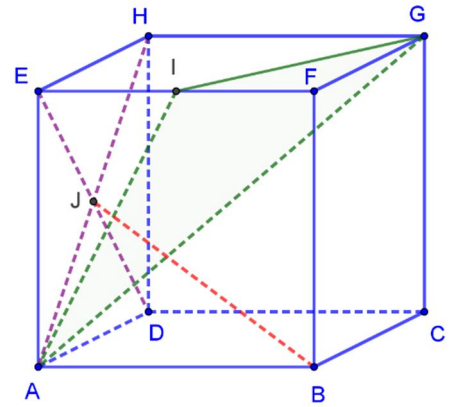
$$(\Gamma) = \{M(x, y) \in C_f / 0 \leq x \leq 1\}$$

autour de l'axe des abscisses. Calculer  $V$ .



## EXERCICE N°2

6 POINTS



On considère le cube  $ABCDEFGH$  ci-contre où  $I$  est le milieu de  $[EF]$  et  $J$  est le centre de la face  $ADHE$ .

On rapporte l'espace au repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

- 1°)
  - a) Déterminer les coordonnées des points  $B, I, J$  et  $G$ .
  - b) Calculer les composantes du vecteurs  $\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AG}$ .
  - c) Montrer alors qu'une équation cartésienne du plan  $(AIG)$  est :  $2x - y - z = 0$ .
- 2°) Soit  $S$  l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  vérifiant :  $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 1 = 0$ .
  - a) Montrer que  $S$  est une sphère de centre  $B$  et de rayon  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .
  - b) Montrer que  $S$  est tangente au plan  $(AIG)$  puis déterminer les coordonnées du point de contact  $H$ .
- 3°) Soit le plan  $P_m$  d'équation cartésienne :  $x + z + m = 0$  où  $m$  est un paramètre réel.
  - a) Etudier suivant les valeurs de  $m$  la nature de l'intersection de  $S$  et  $P_m$ .
  - b) Caractériser l'intersection de  $S$  et  $P_0$  où  $P_0$  est le plan  $P_m$  pour  $m = 0$ .
- 4°) Soit  $K$  le symétrique du point  $C$  par rapport au point  $G$  et  $L$  le point défini par :
 
$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AK}.$$
  - a) Montrer que le triangle  $BLD$  est rectangle en  $L$ .
  - b) Soit  $\alpha$  un réel et le point  $M(1, \alpha, \alpha)$ .
    - i) Montrer que  $M$  est un point de la droite  $(BG)$ .
    - ii) Calculer la distance de  $M$  à la droite  $(DL)$  en fonction de  $\alpha$  puis déterminer la position de  $M$  pour que cette distance soit minimale.

## EXERCICE N°3

5 POINTS

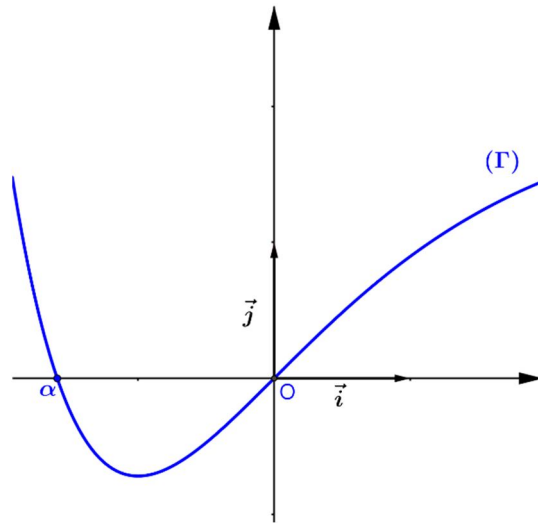
On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{1 - e^{-x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note  $C$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1°)
  - a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement.
  - b) Vérifier que pour tout  $x \neq 0$ , on a :  $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - 1}$ . Calculer alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
  - c) Montrer que  $f$  est continue en 0.
  - d) Montrer que  $f$  est dérivable en 0 et Vérifier que la droite  $\Delta : y = x$  est la tangente à  $C$  au point d'abscisse 0.

2°) La courbe  $\Gamma$  ci-contre et celle d'une fonction  $g$  continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  définie par :  $g(x) = 2 - (x + 2)e^{-x}$ .

$\Gamma$  coupe l'axe des abscisses au points d'abscisses respectifs  $\alpha$  et 0.



a) Montrer que  $-1,6 < \alpha < -1,5$ .

b) Montrer que pour tout  $x$  non nul on a :  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(1 - e^{-x})^2}$ .

c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

d) Montrer que  $f(\alpha) = \alpha(\alpha + 2)$ .

e) Tracer la courbe  $C$  et la tangente  $\Delta$ .

3°) Soit  $A$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $C$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations :  $x = \ln 2$  et  $x = 1$ .

a) Montrer que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[\ln 2, 1]$  on a :  $\frac{\ln^2(2)e^x}{e^x - 1} \leq f(x) \leq \frac{e^x}{e^x - 1}$ .

b) En déduire que :  $\ln^2(2) \ln(e - 1) \leq A \leq \ln(e - 1)$ .

## EXERCICE N°4

6 POINTS

**A-** Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $g(x) = e^x - x - 1$ .

1°) Montrer que  $g$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .

2°) En déduire que pour tout  $x \in [0, +\infty[$ , on a :  $e^x - x \geq 1$ .

**B-** Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = \ln x + \frac{1}{e^x}$ .

On désigne par  $C$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1°) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

- 2°) a) Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .
- b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- c) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans l'intervalle  $]0, +\infty[$  une unique solution  $\alpha$ .
- 3°) **Dans l'annexe jointe (page 5)**, on a tracé les courbes  $C_1$  et  $C_2$  d'équations respectives :  $y = \frac{1}{e^x}$  et  $y = -\ln x$ .
- a) Construire les points  $A$  et  $B$  de la courbe  $C$  d'abscisses respectives  $\alpha$  et  $1$ .
- b) Tracer la courbe  $C$ .
- 4°) a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie  $\mathbb{R}$ .
- b) Tracer dans le même repère la courbe  $C'$  de la fonction  $f^{-1}$ .
- 5°) Soit  $A(\alpha)$  l'aire en unité d'aire de la partie  $(E)$  du plan limité par :
- $C$ ; l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives :  $x = \alpha$  et  $x = 1$ .
- a) Hachurer la partie  $(E)$ .
- b) Montrer que :  $A(\alpha) = (1 + \alpha)e^{-\alpha} + \alpha - 1 - \frac{1}{e}$ .
- c) En déduire l'intégrale  $\int_0^{\frac{1}{e}} f^{-1}(x) dx$ , en fonction de  $\alpha$ .

Annexe ( à rendre avec la copie )

Nom : ..... Prénom : .....

**EXERCICE N°4**

**6 POINTS**

