Mathématiques	*Devoir De Synthèse N° 1*	*Lycée secondaire : Rue Fattouma Bourguiba Monastir*
4ème Tech 4		
Mr : Abbes		*08 / 12 / 2010 , 2H*

❖ Exercice N°1 : (3 points)

Pour chaque question, une seule des 3 propositions est exacte. Laquelle ?

1) Sachant que $e^{i\theta}$ est une solution de l'équation : $z^2 - 2\cos\theta\ z + 1 = 0$, alors l'autre solution est :

a) $i\cos\theta$ b) $i\,e^{i\theta}$ c) $e^{-i\theta}$.

2) Sachant que $\theta \in \left]\pi/2\,,\,3\pi/2\right[$, alors un argument de $z = i\cos\theta$ est :

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $-\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{2} + \theta$.

3) Soit Z un nombre complexe non nul . Si α est une racine carrée de Z alors l'autre racine de Z est

a) $-\alpha$ b) $i\alpha$ c) $\overline{\alpha}$.

❖ Exercice N°2 : (6 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (3 - i)z + 4 = 0$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

b) Mettre les solutions sous forme exponentielle.

2) Soit l'équation (E') : $3z^3 + (-9 + i)z^2 + (14 + 6i)z - 8i = 0$.

a) Montrer que (E') admet une solution imaginaire z_0 que l'on déterminera.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E').

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes $z_A = 1 + i$, $z_B = 2 - 2i$ et $z_C = \frac{2}{3}i$.

a) Montrer que $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = 3i$. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$ et par suite la nature du triangle ABC.

b) Ecrire une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

❖ Exercice N°3 : (7 points)

1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$.

a) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(x) = \frac{3}{\left(\sqrt{x^2 + 3}\right)^3}$.

b) Dresser le tableau de variation de g. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) < 0$.

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - x + \sqrt{x^2 + 3}$. On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé R.

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.
Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que la droite D d'équation : $y = -2x + 1$ est une asymptote à ζ_f au voisinage de $-\infty$.

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $\alpha \in]1.5\,,\,2[$.

d) Construire la courbe ζ_f dans le repère R.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire la courbe $\zeta_{f^{-1}}$ de la fonction réciproque f^{-1} dans le même repère R.

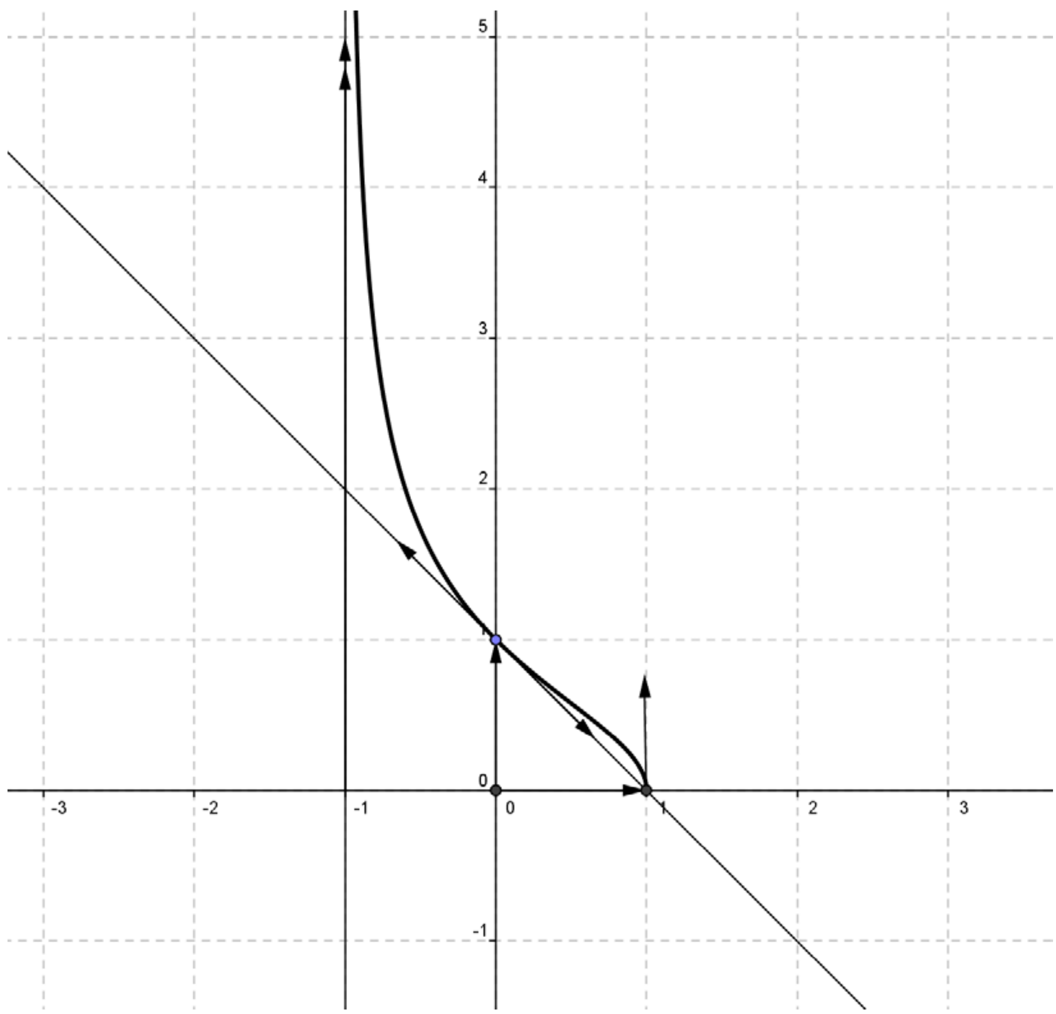
c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

4) a) Montrer que pour tout $x \in [1\ ,+\infty[$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

b) En déduire que pour tout $x \in [1\ ,+\infty[$, on a : $|f(x) - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$.

❖ Exercice N° 4 : (4 points)

La figure ci-dessous est la courbe représentative dans un repère orthonormé d'une fonction f définie sur]-1 , 1]. Sur cette courbe on a indiqué la tangente à ζ_f au point d'abscisse 0 , la demi-tangente au point d'abscisse 1 et l'asymptote verticale .



En utilisant le graphique :

1) Donner f(0), f(1), $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)}{x - 1}$.

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que l'équation f(x) = x admet une unique solution α dans]0 , 1[

4) On donne pour tout $x \in]-1\ ,1[$, $f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)\sqrt{1 - x^2}}$. Soit g la fonction définie sur]0 , π[par g(x) = f(cos x). Montrer que g est dérivable sur]0 , π[et calculer g'(x).