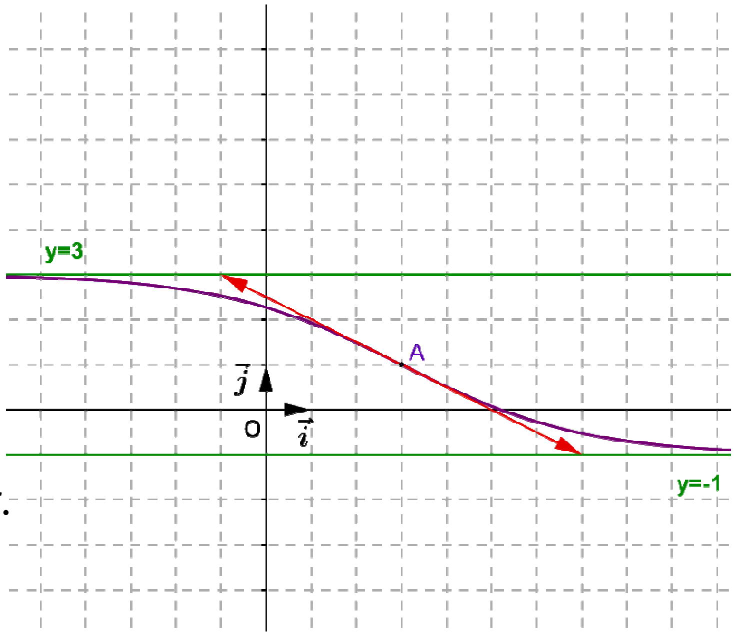
Lycée Pilote 15 octobre 1963 - Bizerte	Classe :4ème Sciences techniques
Prof: Mme Bayoudh	Date : Le 04/12/2013
Devoir de synthèse n °1 en mathématiques	Durée : 2 heures

Exercice 1 : (6points)



A) Dans le graphique ci- contre , on a tracé la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction f décroissante sur IR ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(3,1)$.

Les droites d'équations $y=-1$ et $y=3$ sont des asymptotes à $\mathcal{C}_f$.

On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f.

1) ***Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse est correcte, indiquer laquelle en justifiant votre choix .***

a/ f **réalise une bijection de** IR **sur :** ☐ IR ☐ $]-1,3[$ ☐ $]-1,+\infty[$

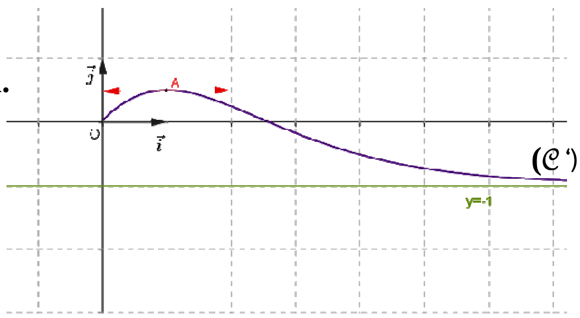
b/ $\lim\limits_{x \to 3} f^{-1}\left(\sin\frac{x\pi}{2}\right) =$ ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ -2

c/ $(f^{-1})'(3) =$ ☐ -2 ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ 2

2) **Tracer dans le même repère la courbe représentative de f^{-1}.**

B) Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Soit g une fonction deux fois dérivable sur $[0,+\infty[$, on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.
Dans la figure ci-dessous , on a représenté la courbe $(\mathcal{C}')$ de la fonction dérivée g' de la fonction g.
$(\mathcal{C}')$ admet une tangente horizontale au point $A(1,\frac{1}{2})$ et une asymptote horizontale d'équation $y=-1$ au voisinage de $(+\infty)$

Pour chacune des propositions suivntes, répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.



1) **g est décroissante sur $[1,+\infty[$.**

2) **$(\mathcal{C})$ admet le point d'abscisse 1 comme point d'inflexion.**

3) **Pour tous a et b de $[0,+\infty[$, $|g(b)-g(a)| \le |b-a|$**

4) **Si $g(0)=0$, alors $(\mathcal{C})$ est située entre les deux droites $y=\frac{1}{2}x$ et $y=-x$**

Exercice 2: (6points)

Soit l'équation (E_θ): $z^3-4iz^2-(5+e^{2i\theta})z+2i(1+e^{2i\theta})=0$ où $\theta\epsilon IR$.

1) a/ Vérifier que 2i est une solution de (E_θ).

b/ Vérifier que $z^3-4iz^2-(5+e^{2i\theta})z+2i(1+e^{2i\theta})=(z-2i)[z^2-2iz-(1+e^{2i\theta})]$

c/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé dicerct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points I,A,B et C d'affixes respectives i , $i-e^{i\theta}$, $i+e^{i\theta}$ et $2i$.

a/ Montrer que I est le milieu de $[AB]$.

b/ Montrer que A et B varient sur un même cercle dont on précisera.

3) On suppose que $\theta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$.

a/ Montrer que $OACB$ est un rectangle.

b/ Montrer que $OA=OB$ si et seulement si $\theta=k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$.

Exercice 3: (8points)

A) Soit f la fonction définie sur $]-\infty,0]$ par $f(x)=-x+\sqrt{x^2-x}$

1) a/ Etudier les variations de f sur $]-\infty,0]$.

b/ Déduire que f réalise une bijection de $]-\infty,0]$ sur un intervalle I que l'on déterminera.

2) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x\in I$.

B) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=-x+\frac{2}{\sqrt{x+1}}$

1) a/ Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $g'(x)=-1-\frac{1}{(\sqrt{x+1})^3}$

b/ Déduire que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c/ Justifier que g^{-1} est dérivable sur J.

2) a/ Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$ et que $0.5<\alpha<1$

b/ Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a $|g(x)-\alpha|\leq 2|x-\alpha|$

c/ Montrer que $(g^{-1})'(\alpha)=\frac{-1}{1+\alpha^3}$

C) Soit h la fonction définie sur IR par $h(x)=\begin{cases} f(x) & si\ x\leq 0 \\ g(x) & si\ x>0 \end{cases}$

h est- elle bijective sur IR ? Justifier.

Bon travail et bonne chance