EXERCICE 1 (3 POINTS)

A) **Répondre par vrai ou faux (sans justification)**

1) Si 2 et – 3 sont des racines d'un polynôme P(x) alors P(x) est factorisable par $x^2 + x - 6$.
2) Deux fonctions polynômes qui ont les mêmes racines sont égales.
3) Si 10 est un zéro de deux polynômes P et Q, alors P(x) – Q(x) est factorisable par : (x – 10).
4) Si un polynôme admet exactement deux racines réelles distinctes alors il est de degré 2
5) Soit P le polynôme défini par $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 18x + 8$.

   Si P admet trois racines réelles α, β *et* γ alors $\alpha.\beta.\gamma = -4$

B) 1) Résoudre dans IR l'équation (E) : $x^2 - 4x + 1 = 0$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 + xy = 15 \end{cases}$

EXERCICE 2 (3 POINTS)

On donne ci-contre le tableau de signe d'un trinôme de second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

1) En utilisant ce tableau, Donner, en justifiant, le signe de chacun des réels a , b *et* c
2) a) Factoriser $Q(x) = ax^4 + bx^2 + c$
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x) > 0$
   c) Sachant que $Q(3) = -80$, déterminer les réels a , b *et* c

EXERCICE 3 (6 POINTS)

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = (x + 1)x^3 - (m + 4)x^2 - 13x - 2m$. où m est un réel.

1) Quel est le degré de P ?
2) Déterminer m pour que – 1 soit un zéro de P(x).
3) Dans cette question on prend **m = 3**
   a) Résoudre dans IR l'équation $x^2 - x - 6 = 0$
   b) Montrer que P est factorisable par : $x^2 - x - 6$.
   c) Résoudre dans IR, l'équation : P(x) = 0.
   d) Résoudre dans IR, l'inéquation : $P(x) \geq 0$.
4) Soit le polyôme Q défini par : $Q(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$.
   a) Factoriser Q(x) et vérifier que $Q(x+1) = (x+1)^2(x + 2)^2$
   b) Montrer que pour tout réel x, $Q(x+1) - Q(x) = 4(x + 1)^3$.
   c) Déduire la somme $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + 30^3$

Exercice 4 (4.5 points)

Soit ABCD un parallélogramme. On désigne par I le milieu du segment [DC] et par G le point d'intersection des droites (BD) et (AI).

1) Faite une figure claire.

2) Montrer que G est le barycentre des points pondérés (D, 2) et (B, 1).

3) a) Construire le point E définie par $4\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC}$. Que représente le point E pour les points C et D ?

b) Construire le point F barycentre des points pondérés (B, 4) et (C, –1).

c) Montrer que les droites (DF) et (EB) sont parallèles.

4) On désigne par K le barycentre des points pondérés (B, 1) , (C,– 2) et (D, 2) .

Montrer que $\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BA}$ puis construire K.

5) Soit H le barycentre des points pondérés (B,4) et (D,3).

a) Montrer que H est le barycentre des points pondérés (E,4) et (F,3).

b) En déduire une construction simple de H.

Exercice 5 (3.5 points)

Soit OAB un triangle équilatéral de côté 3. On désigne par ($\mathscr{C}$) le cercle de centre O passant par A . Soit C le point diamétralement opposé à B sur le cercle ($\mathscr{C}$)

1) a) Construire les points D = $t_{\overrightarrow{OA}}(A)$ et E = $t_{\overrightarrow{OA}}(B)$

b) Montrer que OBED est un trapèze isocèle

2) Soit l’application $f : P \to P \; ; \; M \mapsto M'$ tel que : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}$

Montrer que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{OD}$

3) Construire $\mathscr{C}' = t_{\overrightarrow{OD}} < \mathscr{C} >$ et montrer que $E \in \mathscr{C}'$

4) La droite (BE) recoupe le cercle ($\mathscr{C}$ ') en F. Montrer que $t_{\overrightarrow{OD}}(B) = F$.

5) La droite (FD) recoupe le cercle ($\mathscr{C}$ ’) en G.

a) Déterminer $t_{\overrightarrow{OD}} \prec (OB) \succ$.

b) En déduire que $t_{\overrightarrow{OD}}(C) = G$