Exercice n 1 (5 points)

Dans l'espace $\mathcal{E}$, on considère les plans : $P : x-2y+z+5=0$, $\quad P' : -3x-4y+2z-5=0$

et la droite D définie par le système : $D : \begin{cases} 2z-x=1 \\ 2y-3x=10 \end{cases}$

1) **a)** Étudier la position relative de P et P'. Déduire une représentation paramétrique de $\Delta = P \cap P'$.

b) Montrer que Δ et D sont coplanaires puis déterminer $\Delta \cap D$.

c) Soit Q le plan formé par D et Δ. Montrer que Q a pour équation : $5x-4y+2z+19=0$.

2) Soit la famille de plans Q_m d'équations : $mx-y+2z+3m+1=0$, $\quad m \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que Q_m passe par une droite fixe D' dont on précisera une représentation paramétrique.

b) Déterminer une équation cartésienne de la sphère S de centre $I(-3, \frac{1}{2}, -1)$ et tangente à D'.

c) Discuter suivant m la position relative de S et Q_m.

3) Soit $R : x-y-2z+3=0$. Déterminer une équation cartésienne du plan Q' perpendiculaire à R et appartenant à la famille des plans Q_m.

4) Soit $S_\alpha = \left\{ M(x,y,z) \in \mathcal{E} \,\middle|\, x^2+y^2+z^2+2(\alpha+1)x+4y-2(\alpha+2)z-3\alpha^2-1=0, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Montrer que S_α est une sphère dont on précisera le centre I_α et le rayon R_α.

b) Déterminer l'ensemble des centres I_α lorsque α varie dans $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $S_0 \cap R$ est un cercle et déterminer son centre et son rayon.

d) Déterminer les deux plans R_1 et R_2 tangents à S_0 et parallèles à R.

Exercice n 2 (5 points)

Une étude a été menée auprès de 500 visiteurs répartis entre deux sites de commerce en ligne : Site 1 et Site 2. Le produit étudié est un kit de réparation de peinture pour voiture. Un client peut commander au plus trois kits.

Site 1

- Prix d'un kit : **20 DT**.
- Réduction progressive en fonction du nombre de kits commandés :
  - 2 kits : **5%** de réduction par kit.
  - 3 kits : **10%** de réduction par kit.
- Frais de livraison fixes : **8 DT**, quel que soit le nombre de kits commandés.

Site 2

- Prix d'un kit : **22 DT**.
- Tarifs spécifiques selon le nombre de kits commandés :
  - 1 kit : **22 DT** + livraison de **6 DT**.
  - 2 kits : **45 DT** avec livraison gratuite.
  - 3 kits : **62 DT** avec livraison gratuite.

Parmi les 500 visiteurs, 200 sont des clients (déterminés à passer une commande). Parmi eux, 110 commandent sur le Site 1. **Parmi les clients du Site 1**, 66 achètent un seul kit et 33 achètent deux kits. **Parmi les clients du Site 2**, 36 achètent un seul kit et 27 achètent deux kits. On note les évènements :

- C : Le visiteur est un client
- S : Le client choisit le Site 1
- A_n : Le client achète n kits

1) **a)** Déterminer $P(C)$ et $P(S \mid C)$. Représenter la situation par un arbre de probabilité.

b) Montrer que la probabilité qu'un visiteur achète un kit est 0.204.

c) Si le visiteur achète un kit, quelle est la probabilité que la commande soit effectuée sur le Site 2 ?

d) Montrer que la probabilité qu'un client achète 3 kits est 0.19.

2) Soit la variable aléatoire X représentant le montant payé par un visiteur.

a) Montrer que la probabilité du montant maximal est 0.076. Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Déterminer la fonction de répartition F de X et la représenter graphiquement.

3) Soit Y l'aléa-numérique représentant le nombre de clients achetant 3 kits.

a) Définir Y et préciser ses paramètres.Calculer l'espérance et l'écart-type de Y.

b) Montrer que l'événement "Au moins un client achète 3 kits" est certain.

Exercice n 3 (5 points)

Soit f une fonction deux fois dérivables sur$\mathbb{R} \setminus \{-2,4\}$. $(\mathscr{C}_f)$ est sa courbe dans un repère orthonormé
• La droite d'équation $y=0$ est asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$. • Les droites d'équations : $x=-2$ et $x=4$ sont des asymptotes à $(\mathscr{C}_f)$ • Les tangentes aux points B et C sont parallèles . • La tangente au point C a pour équation :$y=-\frac{3}{8}x+\frac{9}{4}+ln(4)$ • Le point A est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

1) On admet que $\forall x \in D_f$: $f(x)=ln(u(x))$. Soit $(\mathcal{C}_u)$ la courbe de u dans un repère orthonormé

a) Dresser le tableau de variation de u

b) Déterminer une équation de la tangente T à $(\mathcal{C}_u)$ au point d'abscisse 1.

c) Les tangentes à $(\mathcal{C}_u)$ aux points d'abscisses -4 et 6 sont - elles parallèles ? Justifier .

2) Justifier que :

a) f admet sur $]-\infty;-2[$ une fonction primitive F

b) f admet sur $]-2;4[$ une fonction réciproque g

c) f est une primitive d'une fonction h sur $]4;+\infty[$

3) Reconnaitre parmi les tableaux de variation suivants , celui de F , celui de g et celui de h . Justifier .

a)

x	
	$+\infty \searrow 0$

b)

x	
	$-\infty \nearrow 0$

c)

x	
	$-2 \nearrow 4$

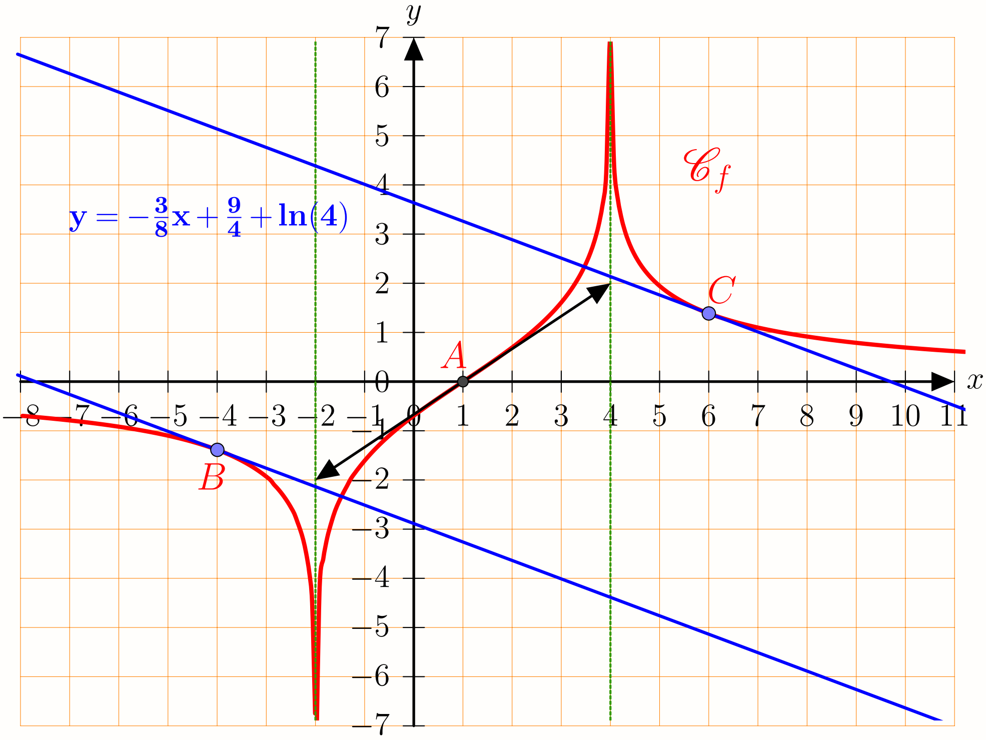
4) Soit la fonction G définie par $G(x)=6ln(e^x+1)-2x$.$(\mathcal{C}_G)$ est sa courbe dans un repère orthonormé

a) Montrer que $\mathcal{D}: y=-2x$ et $\Delta: y=4x$ sont asymptotes à $(\mathcal{C}_G)$.

b) Étudier la position de $(\mathcal{C}_G)$ par rapport à $\mathcal{D}$ et Δ

c) Dresser le tableau de variation de G . Construire $(\mathcal{C}_G)$

5) On admet que G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$ .Donner $g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Déduire $f(x)$, $\forall x \in]-2,4[$



Exercice n 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$.

A) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x) = x + 2 - e^x$

1) Étudier les variations de g sur $[0,+\infty[$.

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α, et que $1 < \alpha < 2$. Trouver un encadrement de α au centième près.

3) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0,+\infty[$.

B)

1) **a)** Montrer que pour tout $x \geq 0$: $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

b) En déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Déterminer la primitive F de f sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en 0.

2) **a)** Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f. Établir que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$.

3) Déterminer une équation de la demi-tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

4) Soit la fonction h définie sur $[0,+\infty[$ par : $h(x) = (1-x)e^x - 1$

a) Étudier les variations de h sur $[0,+\infty[$. En déduire le signe de $h(x)$ sur $[0,+\infty[$.

b) Établir que pour tout $x \geq 0$: $f(x) - x = \frac{(x+1)h(x)}{xe^x+1}$

c) Déduire la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T sur $[0,+\infty[$. Tracer $\mathscr{C}_f$ et T.