Exercice N°1 : 5 points :

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k})$
On considère les points $A\,(1\,;\,1\,;\,0)$; $B(1\,;\,-1\,;\,0)$; $C\,(0\,;\,-1\,;\,0)$; $E\,(1\,;\,1\,;\,1)$
et $D(1+cos(\theta)\,;\,-1\,;\,sin(\theta))$; $\theta \in [0,\pi[$

1) a) *Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle*
   b) *Montrer que $ABCE$ est un tétraèdre*
   c) *Déduire son volume v*
2) *Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que :* $x^2+y^2+z^2-2x+2y+1=0$
   a) *Montrer que S est une sphère de centre B et de rayon 1*
   b) *Vérifier que C et D sont deux points de S*
   c) *Pour quelle valeur de θ, [CD] est un diamètre de S*
3) *Soit le plan Q :* $2x-y+z-1=0$
   a) *Montrer que (AC) est incluse dans Q*
   b) *Montrer que Q coupe S suivant un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon*
4) *Soit le plan* (P_θ) : $(cos\,\theta)x+(sin\,\theta)z-cos\,\theta-1=0$
   a) *Montrer que la droite (AB) est parallèle à (P_θ)*
   b) *Montrer que P_θ est tangent à S en D*

Exercice n°2 : 4 points :

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 1 - \frac{1}{4U_n} \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$

1)a) *Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a :* $U_n > \frac{1}{2}$
   b) *Montrer que la suite (U_n) est décroissante puis en déduire que la suite (U_n) est bornée*
2) *Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par* $V_n = \frac{2}{2U_n-1}$
   a) *Montrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison*
   b) *Exprimer V_n puis U_n en fonction de n*
   c) *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$
3) *On pose $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :* $W_n = \frac{1}{V_0}\times\frac{1}{V_1}\times\ldots\times\frac{1}{V_n}$ *et* $\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} W_k}$
   a) *Calculer W_0 ; W_1 et W_2*
   b) *Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :* $W_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$
   c) *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :* $S_n < 2-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ *puis calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice n°3 : 5 points :

1) On considère dans $\mathbb{C}$ *l'équation* (E) : $z^2-(2+\sqrt{2})z+2+\sqrt{2}-i\sqrt{2}=0$

a) Vérifier que $(\sqrt{2}+2i)^2=-2+4i\sqrt{2}$

b) Montrer que le discriminant de (E) *est* $\Delta=-2+4i\sqrt{2}$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation* (E)

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points : A , B et C d'affixes respectives : $a=1-i$, $b=\sqrt{2}+1+i$ *et* $c=\sqrt{2}+2i$

a) Placer le point A dans la figure 1 *de l'annexe*

b) Vérifier que : $Re(c)=OA$ *puis construire le point* C *dans la figure* 1 *de l'annexe*

c) Montrer que le quadrilatère $OABC$ *est un parallélogramme. Construire alors le point B*

3)a) Déterminer la forme exponentielle de a

b) Montrer que : $|b|=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

c) Montrer que : $\frac{ab}{\sqrt{2}}=\bar{b}$. *En déduire que :* $arg(b)=\frac{\pi}{8}+k\pi$ *où* $k\in\mathbb{Z}$

d) Déterminer la forme exponentielle de b. *En déduire la valeur exacte de* $tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Exercice n°4 : 6 points :

Soit la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$

On désigne par (ζ) *sa courbe dans un repère orthonormé* $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

1)a) Justifier et interpréter les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

b) Vérifier que f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que pour out réel* x, *on a :* $f'(x)=-\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

c) Dresser le tableau de variation de f

2)a) Montrer que f *réalise une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur un intervalle* J *que l'on déterminera*

b) Donner l'expression de sa réciproque $f^{-1}(x)$. *On note* (ζ') *la courbe de* f^{-1} *dans le même repère*

3)a) Vérifier que le point I $\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$ *est un centre de symétrie de la courbe* (ζ)

b) Ecrire une équation de la tangente T à (ζ) *au point I*

c) Montrer que les courbes (ζ) *et* (ζ') *se coupent en un seul point d'abscisses* α *et que* $0{,}4<\alpha<0{,}5$

d) Tracer les courbes (ζ) *et* (ζ') *dans le même repère orthonormé* $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

4) Calculer en fonction de α *,l'aire* $\mathscr{A}$ *du domaine du plan limité par les courbes* (ζ) *et* (ζ'), *les axes des coordonnées .On pourra remarquer que* $\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

Annexe à rendre avec la copie

Nom et Prénom : …………………………………………………………………………………………….Classe : …………

Figure N°1 :

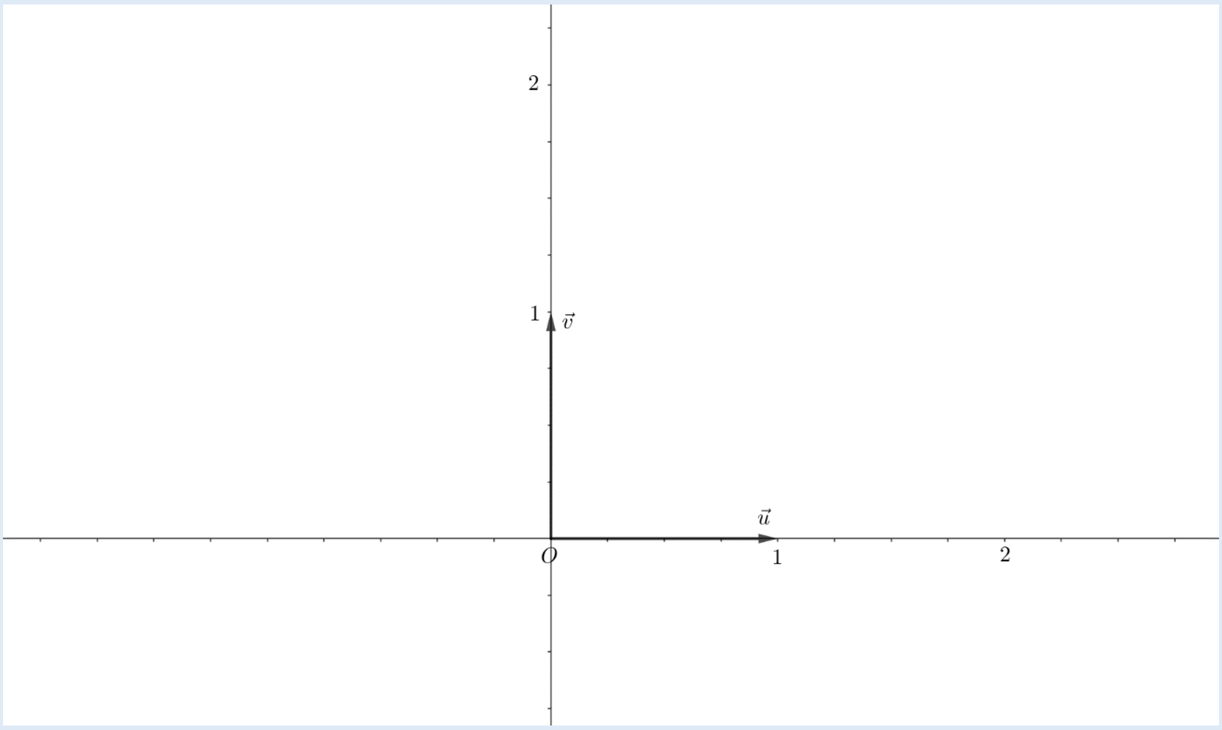

Figure N°2 :