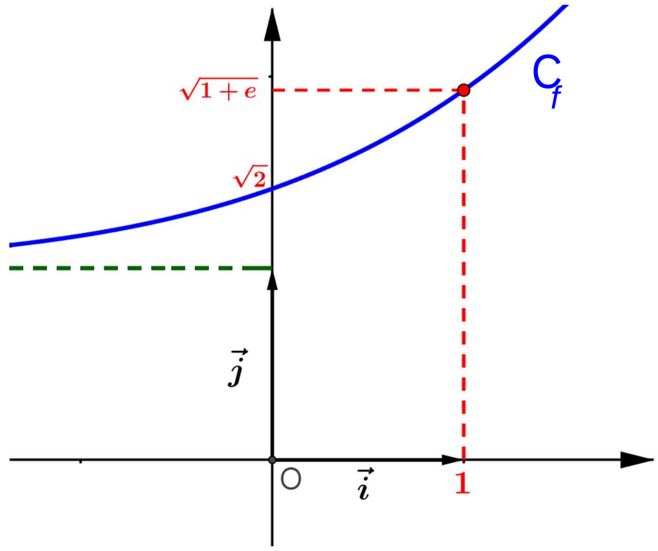
-DEVOIR DE SYNTHESE N°2-

EXERCICE N°1 — 3 POINTS

Dans la figure ci-dessous on a représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe C_f d'une fonction f dérivable sur IR et tel que pour tout réel x, on a :

$2f'(x)\,f(x)-f^2(x)+1=0$

- La droite d'équation $y=1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$.
- C_f admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

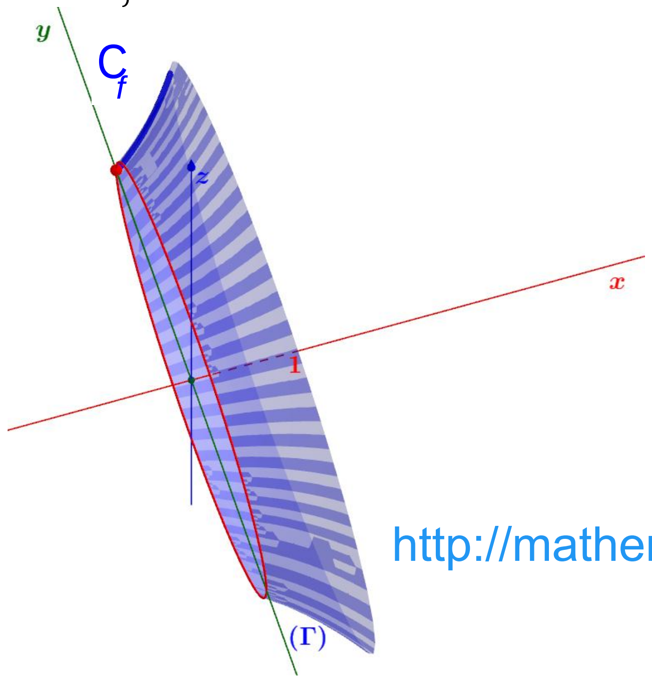


1°) Par lecture graphique déterminer : $f(0)$, $f(1)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

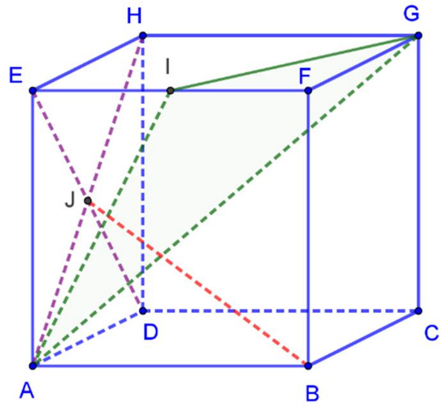
2°) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle I que l'on précisera.

3°) Soit le volume V du solide engendré par la rotation de l'arc

$(\Gamma)=\left\{M(x,y)\in C_f \,/\, 0\le x\le 1\right\}$ autour de l'axe des abscisses. Calculer V.



EXERCICE N°2 — 6 POINTS



On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre où I est le milieu de $[EF]$ et J est le centre de la face $ADHE$.

On rapporte l'espace au repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1°) a) Déterminer les coordonnées des points B, I, J et G.

b) Calculer les composantes du vecteurs $\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AG}$.

c) Montrer alors qu'une équation cartésienne du plan (AIG) est : $2x-y-z=0$.

2°) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant : $3x^2+3y^2+3z^2-6x+1=0$.

a) Montrer que S est une sphère de centre B et de rayon $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

b) Montrer que S est tangente au plan (AIG) puis déterminer les coordonnées du point de contact H.

3°) Soit le plan P_m d'équation cartésienne : $x+z+m=0$ où m est un paramètre réel.

a) Etudier suivant les valeurs de m la nature de l'intersection de S et P_m.

b) Caractériser l'intersection de S et P_0 où P_0 est le plan P_m pour $m=0$.

4°) Soit K le symétrique du point C par rapport au point G et L le point défini par : $\overrightarrow{AL}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AK}$.

a) Montrer que le triangle BLD est rectangle en L.

b) Soit α un réel et le point $M(1,\alpha,\alpha)$.

i) Montrer que M est un point de la droite (BG).

ii) Calculer la distance de M à la droite (DL) en fonction de α puis déterminer la position de M pour que cette distance soit minimale.

EXERCICE N°3 — 5 POINTS

On considère la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{1-e^{-x}} & si\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

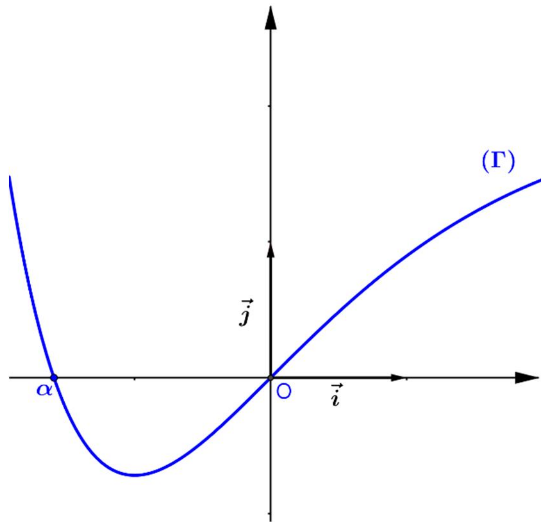
b) Vérifier que pour tout $x\neq 0$, on a : $f(x)=\dfrac{x^2e^x}{e^x-1}$. Calculer alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. .

c) Montrer que f est continue en 0.

d) Montrer que f est dérivable en 0 et Vérifier que la droite $\Delta : y=x$ est la tangente a $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

2°) La courbe Γ ci- contre et celle d'une fonction g continue et dérivable sur IR définie par : $g(x)=2-(x+2)e^{-x}$.

Γ coupe l'axe des abscisses au points d'abscisses respectifs α et 0.



a) Montrer que $-1{,}6<\alpha<-1{,}5$.

b) Montrer que pour tout x non nul on a : $f'(x)=\dfrac{x\,g(x)}{(1-e^{-x})^2}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Montrer que $f(\alpha)=\alpha(\alpha+2)$.

e) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente Δ.

3°) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=\ln 2$ et $x=1$.

a) Montrer que pour tout x de l'intervalle $[\ln 2,1]$ on a : $\dfrac{\ln^2(2)e^x}{e^x-1}\le f(x)\le\dfrac{e^x}{e^x-1}$.

b) En déduire que : $\ln^2(2)\ln(e-1)\le A\le\ln(e-1)$.

EXERCICE N°4 — 6 POINTS

A- Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=e^x-x-1$.

1°) Montrer que g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

2°) En déduire que pour tout $x\in[0,+\infty[$, on a : $e^x-x\ge 1$.

B- Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{e^x}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2°) a) Montrer que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans l'intervalle $]0,+\infty[$ une unique solution α.

3°) <u>Dans l'annexe jointe (page 5)</u>, on a tracé les courbes C_1 et C_2 d'équations respectives : $y=\frac{1}{e^x}$ et $y=-\ln x$.

a) Construire les points A et B de la courbe C d'abscisses respectives α et 1.

b) Tracer la courbe C.

4°) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie IR.

b) Tracer dans le même repère la courbe C' de la fonction f^{-1}.

5°) Soit $A(\alpha)$ l'aire en unité d'aire de la partie (E) du plan limité par :

C ; l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : $x=\alpha$ et $x=1$.

a) Hachurer la partie (E).

b) Montrer que : $A(\alpha)=(1+\alpha)e^{-\alpha}+\alpha-1-\frac{1}{e}$.

c) En déduire l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{e}} f^{-1}(x)dx$, en fonction de α.

Annexe (à rendre avec la copie)

Nom : ……………………………. Prénom : …………………………………

EXERCICE N°4 | 6 POINTS