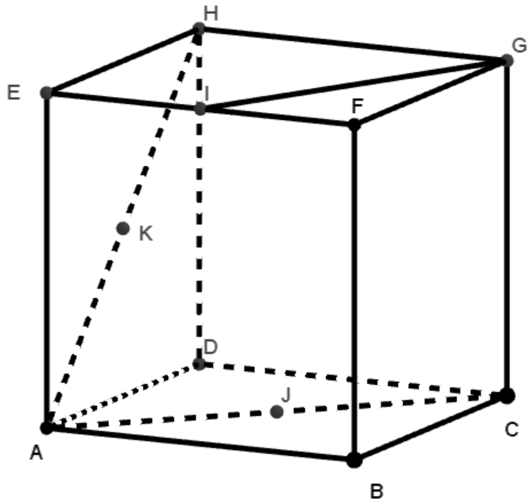
Ministère de l’éducation Commissariat régional de l’éducation Tunis 1	****Devoir de synthèse N°2 **** Régional****	
	$4^{ème}$Année	Section: Sciences Techniques
Epreuve : Mathématiques	Durée : 3 h	Date : 15/03/2023

<u>Le sujet comporte 4 pages dont une annexe est à rendre avec la copie.</u>

<u>Exercice 1 :</u> (3 points)

Soit ABCDEFGH un cube dans L’espace orienté muni d'un repère orthonormé directe

$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Soit I milieu du segment [EF] , J le centre du carré ABCD et K centre du carré ADHE.



Répondre par **vrai** ou **faux** en **justifiant** votre réponse pour chacune des questions suivantes **:**

1) $(\overrightarrow{GE}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GC})$ est une base directe.
2) $\overrightarrow{JG} \wedge \overrightarrow{IG} = \overrightarrow{BK}$.
3) $(\overrightarrow{GJ}, \overrightarrow{GI}, \overrightarrow{BK}) = \frac{11}{4}$.
4) l’aire du triangle *IJG* est égale á $\frac{\sqrt{21}}{8}$.
5) le triangle JIG est isocèle.
6) La distance du point J a la droite (IG) est égale á $\sqrt{\frac{21}{5}}$

<u>Exercice 2 :</u> (6 points)

L’espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points A(1 ; 2 ; 3), B(-1 ; 0 ; 2) , C(3 ; 3 ; 1) , D(1 ; 2 ; 0) et E(3 ; 4 ; 4).

1) Montrer que le triangle BDE est rectangle en D.

2) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.

b) Vérifier que les point B, C et D définissent un plan. On désigne par P le plan (BCD).

c) Calculer l’aire du triangle BCD.

3) a) Monter que ABCD est un tétraèdre et calculer son volume V.

b) En déduire la distance du point A au plan P.

c) Montrer qu’une équation cartésienne de P est : $2x -3y - z +4 = 0$.

4) Soit l'ensemble S = { *M(x , y , z) de $\mathcal{E}$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$* } .

a) Montrer que S est une sphère de diamètre *[BE].*

b) En déduire que D est un point de la sphère S.

Montrer que S est tangente au plan d'équation : *z = 0* et préciser leur point de contact.

c) Vérifier que S est la sphère circonscrite au tétraèdre BCDE

Et que son volume est égal 2 V.

5) a) Montrer que P et S sont sécants suivant un cercle ζ dont déterminera le centre et le rayon.

b) Donner l'équation de la sphère S_1 de rayon 3 et dont l'intersection avec le plan P est le cercle ζ .

Exercice 3 : (5 points)

Sot la fonctions *f* définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x(1+\ln^2 x)$.

1) Montrer que *f* est prolongeable par continuité en 0.

2) a) Montrer que *f* st dérivable sur $]0;+\infty[$ et que pour tout *x* de $]0;+\infty[$ on a :

$$f'(x) = (1+\ln x)^2.$$

b) Déduire que la courbe *Cf* admet un point d'inflexion *I* dont on précisera les coordonnés.

c) Dresser le tableau de variation de *f.*

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{f(x)}{x})$. ; Interpréter le résultat graphiquement.

b) Etudier les positions de *Cf* et la droite d'équation *y =x*

c) Construire la courbe *Cf* dans le repère donné **en annexe.**

4) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0\ ;\ +\infty[$ sur un intervalle *J* que l'on précisera.

b) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1}.

c) Construire la courbe de la fonction f^{-1} dans le même repère

Exercice 4 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur IR par **:** $f(x) = x + 1 - \dfrac{1}{e^x - 1}$ **.**

On désigne par **(C)** sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Montrer que f est dérivable sur IR* et que pour tout réel *x* de IR***,** on a **:** $f'(x) = 1 + \dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$ **.**

b) Dresser le tableau de variation de f sur IR**.**

2) a) Montrer que $I\left(0,\frac{3}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe **(C) .**

b) Montrer que le droite D_1 d'équation $y = x+1$ asymptote à **(C)** au voisinage de $+\infty$.

c) Déterminer l'asymptote à **(C)** au voisinage de $-\infty$.

d) Construire (**C)** dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

3) Soit *h* la restriction de f sur $]0,+\infty[$

a) Montrer que h réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle *J* à déterminer,

b) Montrer que l'équation *h(x) = 0* admet une unique solution α sur]0, + ∞[et que *0,5 <* α *< 0,6*

c) Montrer que $h'(\alpha) = \alpha^2 + 3\alpha + 3$. Donner une équation de la tangente a **(C)** au point d'abscisse α.

d) Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 et calculer $\left(h^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{\alpha^2 + 3\alpha + 3}$.

4) a) Vérifier que $f(x) = x+1+\frac{e^{-x}}{e^{-x}-1}$

b) Donner la primitive F de f sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1.

Annexe à rendre avec la copie
Nom : …………………..………………….. prénom : …………………………….. classe ………

Exercice 3 :