Devoir de synthèse n°2

Epreuve : Mathématiques
Niveau : 4ème SC-Techniques
Durée : 3 Heures

Direction régionale de
L'éducation Tozeur
A.S :2024/2025

Exercice n°1 : (04 Points)

Les parties I) et II) sont indépendantes

I) Pour chaque question ci-après, **cocher** la bonne réponse
Aucune justification n'est demandée.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2 + \frac{3}{e^x+3}$ alors sa représentation graphique (C_f) admet au voisinage de $+\infty$, une asymptote d'équation :

a: $y = x + 3$ b: $y = x + 2$ c: $y = x$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{e^x}$ est égal à :

a: $+\infty$ b: 0 c: $-\infty$

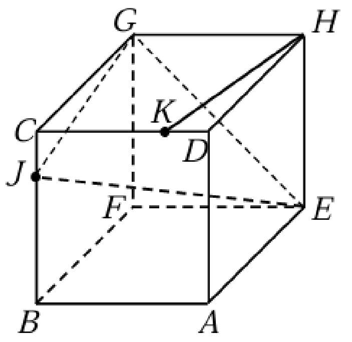
3) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 + \frac{e^x}{e^x+1}$.
La primitive G de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 est :

a: $G(x) = 2x + ln(e^x + 1)$ b: $G(x) = 2x + ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right)$ c: $G(x) = ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right)$

4) Soit la fonction h définie sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ par $h(x) = 2 - ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.
La fonction h est :

a: $paire$ b: $impaire$ c: $ni\ paire\ ni\ impaire$

II) ABCDEFGH est un cube d'arrête 1. K est un point de $[DC]$ tel que $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$
et J est un point de $[BC]$ tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$
On munit alors l'espace du repère orthonormé $(A,\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{AE}\ ,\overrightarrow{AD})$
1) Déterminer les coordonnées des points H, E, J, K et G
2) Montrer que $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EG}$ ne sont pas colinéaires
3) Calculer $\det(\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{EG}\ ,\overrightarrow{HK})$
4) En déduire que la droite (HK) est parallèle au plan (EGJ)



Exercice n°2 : (06 Points)

I) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 1 - xe^{1-x}$

1) Dresser le tableau de variation de h

2) En déduire que pour tout réel x , $h(x) \geq 0$

II) Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$

(C_f) est sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2$ et $\|\vec{j}\| = 1$

1) a- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b- Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$. Interpréter graphiquement le résultat

2) a- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = (x^2 - 2x)e^{1-x}$

b- Dresser le tableau de variation de f

3) a- Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1

b- Etudier la position relative de (C_f) par rapport à (T)

4) Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α
Et que $-1 < \alpha < 0$

5) a- Tracer (T) et (C_f) sur $[-1, +\infty[$.

b- Discuter suivant le paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation $x^2 e^{1-x} = -m$

6) Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$ est une primitive de la fonction f

Exercice n°3 : (04,5 Points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

1) Soit les plans P et Q d'équations $P :\ x + y - z - 5 = 0$ et $Q :\ x + y - z + 7 = 0$
Montrer que les plans P et Q sont strictement parallèles

2) Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tel que :
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 1 = 0$

a- Vérifier que (S) est la sphère de centre $I(1,2,1)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$

b- Montrer que (S) et P se coupent suivant un cercle (C) de centre $J(2,3,0)$ dont on déterminera le rayon r

c- Déterminer $S \cap Q$

3) On donne les points $A(0,0,1)$, $B(0,1,2)$ et $C(2,2,5)$

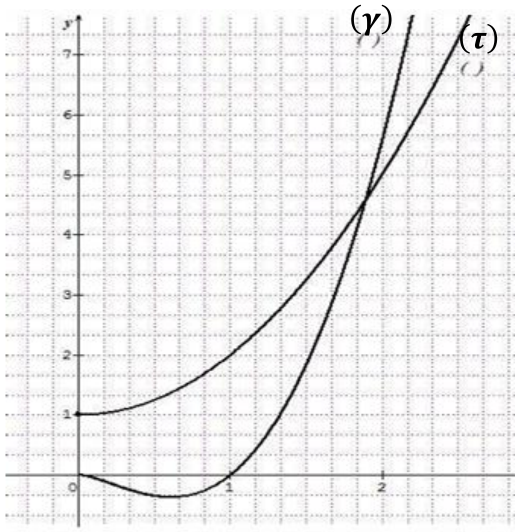
a- Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b- Montrer que pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM} = 2(x + y - z + 1)$

4) Déterminer l'ensemble des points M de la sphère pour lesquels ABCM est un tétraèdre de volume égal à 2

Exercice n°4 : (05,5 Points)

I) Dans la figure ci-contre (γ) est la courbe de la fonction $x \to x^2\ln(x^2)$ et (τ) est la courbe de la fonction $x \to 1 + x^2$ et α est l'abscisse du point d'intersection de (γ) et (τ)



1) Par lecture graphique préciser la position Relative de (γ) et (τ) sur $]0,+\infty[$

2) On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ Par $g(x) = 1 + x - xlnx$

a- En déduire le signe $g(x^2)$ sur$]0,+\infty[$

b- Vérifier que $1{,}89 < \alpha < 1{,}9$

c- Montrer que $ln\alpha = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\alpha^2})$

II) Soit la fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur $]0,+\infty[$

$f(x) = \frac{lnx}{1+x^2}$

et (C_f) est sa représentation graphique

Dans un repère orthonormé$(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 2$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ puis Interpréter graphiquement

2) a- Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$

b- Dresser le tableau de variations de f

3) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ puis donner un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-3} prés

4) Tracer (C_f) sachant que $A(1,0) \in (C_f)$

5) Déterminer les valeurs de paramètre réel m pour lesquelles l'équation $mx^2 + m - lnx = 0$ admet deux solutions