

Exercice 1: (4 points)

Sur une machine, on considère que les probabilités de dérèglement électronique et mécanique pour un jour donné sont respectivement : 0,003 et 0,007. Il n'y a pas d'autres possibilités de dérèglement et on sait que la probabilité de dérèglement mécanique sachant qu'il y a un dérèglement électronique est 0,5.

On considère les événements suivants :

E : « Le dérèglement est électronique ».

M : « Le dérèglement est mécanique ».

1) a- Déterminer $p(E)$, $p(M)$ et $p(M/E)$.

b- Montrer que $p(M/\bar{E}) = 0,0055$.

2) a- Calculer la probabilité que cette machine ait les deux dérèglements un jour donné.

b- Calculer la probabilité que cette machine n'ait aucun dérèglements un jour donné.

3) a- Déterminer la probabilité de dérèglement électronique sachant qu'il ya un dérèglement mécanique.

b- Calculer la probabilité que cette machine ait un seul dérèglement.

4) Aujourd'hui la machine est déréglée, quelle est la probabilité que les causes de ce dérèglement soient à la fois électroniques et mécaniques ?

Exercice 2: (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; on considère les points $A(2,0,2)$; $B(2,1,1)$; $C(1,2,1)$ et $E(-1,-1,0)$.

1) a- Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b- Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) a- Montrer que les points A, B, C et E sont non coplanaires.

b- Calculer le volume du tétraèdre ABCE.

c- En déduire que la distance du point E au plan (ABC) est égale à $2\sqrt{3}$.

3) Soit Δ la droite passant par E et perpendiculaire au plan (ABC).

a- Vérifier qu'un système d'équations paramétriques de Δ est :

$$\Delta : \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = -1 + \alpha \\ z = \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

b- Vérifier que le point I(1,1,2) appartient à Δ .

c- Montrer que le point I est le centre du cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC.

4) Soit (S) l'ensemble des points M(x,y,z) de l'espace vérifiant :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 12 = 0$$

a- Montrer que (S) est la sphère de centre E et de rayon $\sqrt{14}$.

b- Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant le cercle (Γ) .

5) Soient F le point défini par : $\overrightarrow{EF} = 2 \overrightarrow{IF}$ et la sphère (S') de centre F et de rayon $\sqrt{14}$.

Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S') suivant le cercle (Γ) .

Exercice 3: (4,5 points)

Dans la figure de l'annexe ci-jointe on a construit dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La courbe représentative ζ d'une fonction f définie sur $[0, +\infty[$ et la droite Δ d'équation $y = x$.

On sait que ζ admet :

- Une demi-tangente verticale en O.
- Une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
- Une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$.
- La droite $\Delta : y = x$ est tangente à ζ au point d'abscisse e.

1) Par une lecture graphique et en s'aidant des informations données ci-dessus :

a- Déterminer $f(0)$; $f(1)$; $f(e)$; $f'(1)$; $f'(e)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b- Justifier que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

c- On note f^{-1} la fonction réciproque de f .

Tracer ζ' la représentation graphique de f^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) On admet pour la suite que pour tout $x \in]0, +\infty[$;

$$f(x) = x(\ln x)^2 + 2x(1 - \ln x) \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

a- Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.

b- Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

c- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ puis déduire que ζ admet un point d'inflexion I que l'on précisera.

Exercice 4: (6,5 points)

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-x} + x - 1$.

a- Dresser le tableau de variation de g .

b- Montrer que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c- En déduire $x + e^{-x} \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d- Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution notée α .

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{x + e^{-x}}$ et (C) sa courbe représentative

dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a- Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha$

4) a- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = \frac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$

b- Dresser le tableau de variation de f .

5) a- Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b- Vérifier que : $x - f(x) = \frac{x g(x)}{g(x) + 1}$.

En déduire la position relative de (C) par rapport à tangente T .

c- Montrer que le point O est un point d'inflexion pour la courbe (C) .

6) Construire T et C puis construire le point A de la courbe (C) d'abscisse α .

