Epreuve : MATHEMATIQUES	Devoir de synthèse N°2 *************************** Sujet commun	Commissariat régional Tunis 1
13 Mars 2024	Durée : 3 h	Niveau : 4ème Année ******** Section: Sciences techniques

Le sujet comporte 5 pages dont l'annexe page 5 est à rendre avec la copie.

Exercice N°1: (5 points)

L'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On donne les points $A(2,1,0)$; $B(2,-1,-2)$ et $C(0,1,-2)$.

1)a) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b) En déduire que les points *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés.

c) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan P = (ABC) est : x + y – z -3 = 0.

2)a) Calculer $sin(B\hat{A}C)$ et $cos(B\hat{A}C)$..

b) Déduire que le triangle ABC est équilatéral.

3) Soit la droite Δ de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2+\alpha \\ y = 1+\alpha \\ z = -2-\alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Vérifier que Δ est L'axe du cercle circonscrit au triangle ABC.

b) Montrer que les droites Δ et (AB) ne sont pas coplanaires.

c) Calculer la distance entre Δ et (AB).

4) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que :

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z+5=0.$$

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.

b) Montrer que $S \cap P$ est le cercle ζ circonscrit au triangle ABC.

c) Déterminer le centre H et le rayon r du cercle ζ.

5)a) Déterminer la perpendiculaire commune à Δ et (AB).

b) Retrouver la distance entre Δ et (AB).

6)a) Vérifier que S est tangente aux plans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $\left(O,\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ respectivement en A et C.

b) Déterminer $S \cap (O,\vec{\jmath})$.

<u>Exercice N°2:</u> (4 points)

Dans un lycée une étude a montré que

- 30% des élèves sont inscrit dans un club de Robotisme.
- 40 % des élèves sont inscrit dans un club de Musique.
- 10 % des élèves sont inscrit dans les deux clubs.

On choisit au hasard un élève et on note :

M : l'événement « l'élevé est inscrit dans le club de Musique »

R : l'événement « l'élevé est inscrit dans le club de Robotisme »

1) Calculer la probabilité que cet élève

a) Soit inscrit au moins dans l'un des deux clubs.

b) n'est inscrit en aucun club

2) Calculer la probabilité que cet élève

a) est inscrit seulement dans le club de Musique.

b) est inscrit seulement dans le club de Robotisme.

3) Quelle est la probabilité que cet élève est inscrit en un et un seul de ces clubs.

4) On choisit un élève inscrit dans le club de Robotisme

Quelle est la probabilité que cet élève est inscrit dans le club de Musique

5) On choisit n élèves, n > *2*

a) Calculer la probabilité p_n d'avoir au moins un élève qui est inscrit dans un club de Robotisme

b) Déterminer le plus petit entier n tel que : $p_n \geq 0.9$.

<u>Exercice N°3:</u> (6 points)

A- On a construit en annexe, dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative C_g d'une fonction g, et la droite D d'équation $y=\frac{1}{2}x$

- La droite $x = 0$ est une asymptote a C_g
- C_g admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l' axe $\left(O,\vec{\jmath}\right)$
- La courbe C_g coupe l'axe $\left(O,\vec{\imath}\right)$ en deux point A et B d'abscisses respectives α et β.

- C_g admet au point (α , 0) une tangente passant par le point (2 , -5).
- C_g admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale .

1) Déterminer graphiquement

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{g(x)}{x})$.

b) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

c) $g'(2)$ et $g'(\alpha)$

2) la fonction g définie sur l'intervalle$]0;+\infty[$ par $g(x) = x - 2 - 2\ln x$.

a) Calculer $g'(x)$. En déduire en utilisant $g'(\alpha)$ que $0,4 < \alpha < 0,5$

b) Montrer que $5,3 < \beta < 5,4$

B- Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[\setminus\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x.\ln x}{x-2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé$(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat.

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} (\dfrac{f(x)}{x})$ puis interpréter graphiquement le résultat.

2)a) Montrer que *f* est dérivable sur $]0,+\infty[\setminus\{2\}$et que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-2)^2}$

b) Dresser le tableau de variations de *f.*

c) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{2}$ et que $f(\beta) = \dfrac{\beta}{2}$.

3) a) En utilisant la courbe C_g ,construire les points C et D de (C) d'abscisses respectives α et β.

b) Tracer(C) en annexe.

<u>Exercice N°4:</u> (5 points)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = e^{2x} - 2e^{x}$ **.**

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1)a) Déterminer les coordonnées du point *A* le point d'intersection entre C_f et l'axe$(O,\vec{i})$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$. ; Interpréter le résultat graphiquement.

c) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}(\frac{f(x)}{x})$. ; Interpréter le résultat graphiquement.

2) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de f.

3)a) Montrer que la courbe C_f admet un point d'inflexion B dont on précisera.

b) Donner une équation de la tangente T a C_f au point *B.*

4)a) Montrer que pour tout *x* de l'intervalle [0, 1] on a $0 \le f\,'(x) \le 2e^2$.

b) En déduire que pour tout *x* de l'intervalle [0, 1] on a $-1 \le f(x) \le 2e^2.x-1$.

5) Construire C_f et T dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

6) Soit *h* la restriction de f sur $[0,+\infty[$

a) Montrer que h réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle *J* à déterminer,

On désigne par h^{-1} sa fonction réciproque

b) Expliciter $h^{-1}(x)$ pour tout *x* de *J.*

c) Tracer (C') la courbe de h^{-1} dans le même repère.

7) Donner la primitive de f sur IR qui s'annule en 0.

Annexe à rendre avec la copie
Nom .... Prénom …………........... .... Classe : .... N°.......

Exercice N°2 :

Figure 1