| Délégation Régionale de Sousse | **DEVOIR DE SYNTHESE N°2** | **4** **Sciences Techniques** |
|---|---|---|
| | | **Date** : 13 – 03 – 2024 |
| **Année Scolaire** : 2023/2024 | Mathématiques | **Durée** : 3 heures |

***EXERCICE N°1*** ***(5 points)***

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ .

On considère les points A ( 1, −1 , 2 ) ; B ( 1, 1 , 6) , C ( 0 , −1 , 0 ) et D ( 0 , 1 , 0 )

**1)** **a)** Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

**b)** Déduire que les points A, B et C déterminent un plan $\boldsymbol{P}$ dont une équation est $2x + 2y - z + 2 = 0$ .

**2)** Soit $\boldsymbol{S}$ l'ensemble des points $M\ (x\ ,y\ ,z\ )$ de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z + 4 = 0$ .

**a)** Montrer que $\boldsymbol{S}$ est une sphère dont on précisera le centre $\boldsymbol{I}$ et le rayon **R** .

**b)** Montrer que le plan $\boldsymbol{P}$ et la sphère S se coupent suivant un cercle $\boldsymbol{C}$ dont on déterminera le rayon $\boldsymbol{r}$ et les coordonnées de son centre de $H$.

**3)** Pour tout réel $m$ on considère le plan $\boldsymbol{Q_m}$ d'équation x – 2 y + 2 z + m = 0

**a)** Vérifier que la droite $(AD)$ est perpendiculaire au plan $\boldsymbol{Q_m}$ .

**b)** Déterminer les valeurs de $m$ pour lesquelles le plan $\boldsymbol{Q_m}$ et la sphère $\boldsymbol{S}$ sont tangents.

***EXERCICE N° 2 :*** ***( 4 points )***

Au secrétariat d'un lycée tous les dossiers des élèves sont regroupés dans une même armoire .
On sait que :
20 % des élèves du lycée sont internes ; 50% sont demi-pensionnaires et 30% sont externes.

- 60 % des internes sont des garçons
- 50 % des demi-pensionnaires sont des filles
- 27 % des dossiers sont ceux des filles externes

( Dans cet exercice on donnera les résultats arrondies au millième )

**1-** On extrait au hasard un dossier de l'armoire .On considère les événements :

I : « le dossier extrait est celui d'un élève interne »
D : « le dossier extrait est celui d'un élève demi-pensionnaire »
E : « le dossier extrait est celui d'un élève externe »
F : « le dossier extrait est celui d'une fille »

**a**-Construire un arbre pondéré décrivant cette situation

**b**-Montrer que $p(F) = 0{,}6$

**c**- Le dossier extrait est celui d'une fille. Quelle est la probabilité qu'il soit un dossier d'une demi-pensionnaire ?

**d –** Calculer $p(\overline{F} \cap I)$

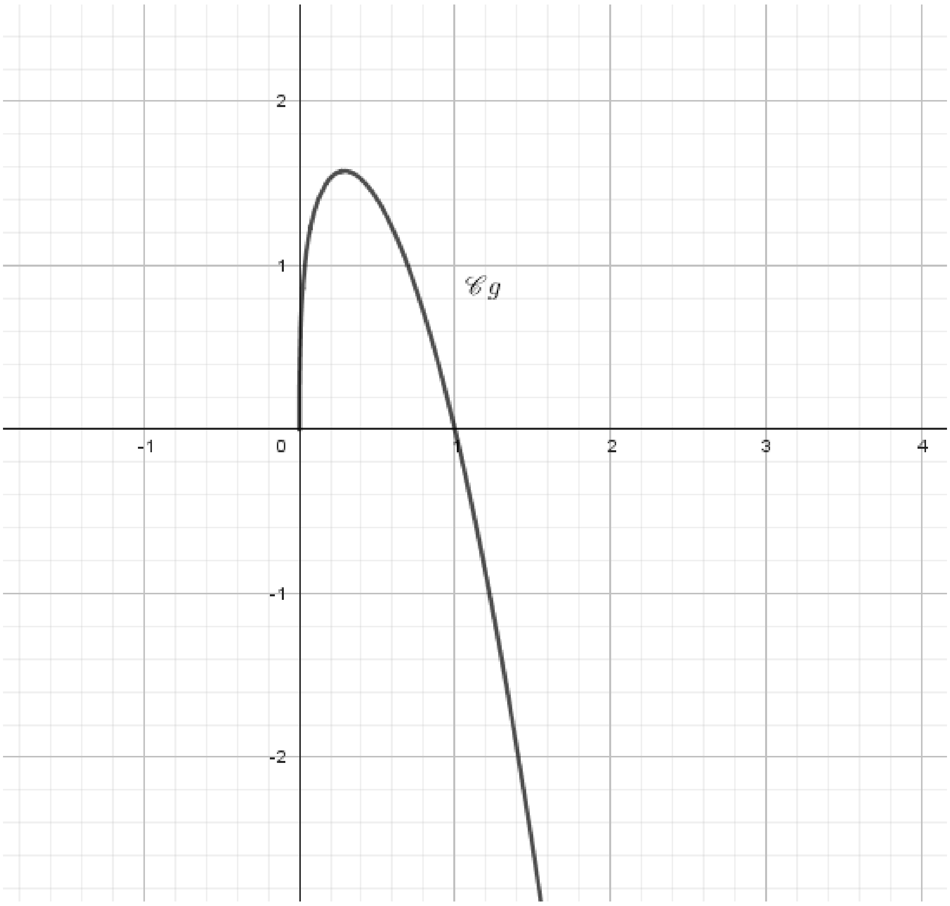
**2**- On extrait $\boldsymbol{n}$ dossiers de l'armoire, successivement en remettant à chaque fois le dossier extrait.

**a**-Calculer la probabilité $\boldsymbol{p_n}$ d'obtenir au moins un dossier d'un garçon interne.

**b**-Trouver la plus petite valeur de $\boldsymbol{n}$ tel que $\boldsymbol{p_n} \geq 0{,}98$

**EXERCICE 3:** ***( 6 points )***

**I-** On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction $g$ définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{x}(2 - \ln x) - 2x^2$ si $x \in ]0,+\infty[$ et $g(0) = 0$ .




On sait que :

- La courbe de g coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 1.
- La courbe de g admet au voisinage de $+\infty$ une branche infinie parabolique de direction celle de la droite $(O,\vec{j})$ .

1)Etudier la dérivabilité de g à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement

2) En utilisant le graphique ci-dessus:

a/ Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$.

b/Déterminer suivant les valeurs de x , le signe de g(x).

**II-**Soit la fonction $f$ définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} - x$ , on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f

Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ .Interpréter graphiquement le résultat.

**1) a/** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

**b/** Montrer que la droite $(\Delta): y = -x$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$

**c/** Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $(\Delta)$

2) **a/** Montrer que pour tout $x \in ]0\,,+\infty[$ , $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$

**b/** Dresser le tableau de variation de $f$

**c/** Vérifier que le point $A(\,e^2\ ,\ \frac{2}{e} - e^2)$ appartient à $\mathscr{C}$ .

3) On a placé dans la <u>figure 1</u> de l'annexe ci-jointe le point $A(\,e^2\ ,\ \frac{2}{e} - e^2)$ dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ . Construire la droite $(\Delta)$ et la courbe $\mathscr{C}$ dans ce repère.

<u>EXERCICE 4</u> <u>**:**</u>***( 5 points )***

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3e^{1-x}$. Soit $\boldsymbol{C}$ la courbe représentative de .

1) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ , $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ .Interpréter graphiquement les résultats .
2) Montrer que la droite $D : y = 0$ asymptote à $\boldsymbol{C}$ au voisinage de $+\infty$.
3) **a/** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ , $f'(x) = x^2(3 - x)e^{1-x}$ .

   **b/** Dresser le tableau de variation de f .

   **c/** Montrer que le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion de $\boldsymbol{C}$ .
4) Soit g la restriction de f sur $[3\,,+\infty[$.

   **a/** Montrer que g réalise une bijection de$[3\,,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   **b/**On a tracé dans <u>figure 2</u> de l'annexe la courbe de g .Tracer dans le même repère la courbe de $g^{-1}$
5) Soit la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x}$.

   **a/** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ , on a : $h'(x) = x^3e^{-x}$.

   **b/** Déterminer alors la primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}$ , telle que $F(1) = 0$ .

# Annexe à rendre avec la copie

Nom et prénom : . . . . . . . . . . . . . . .

**Fgure1**

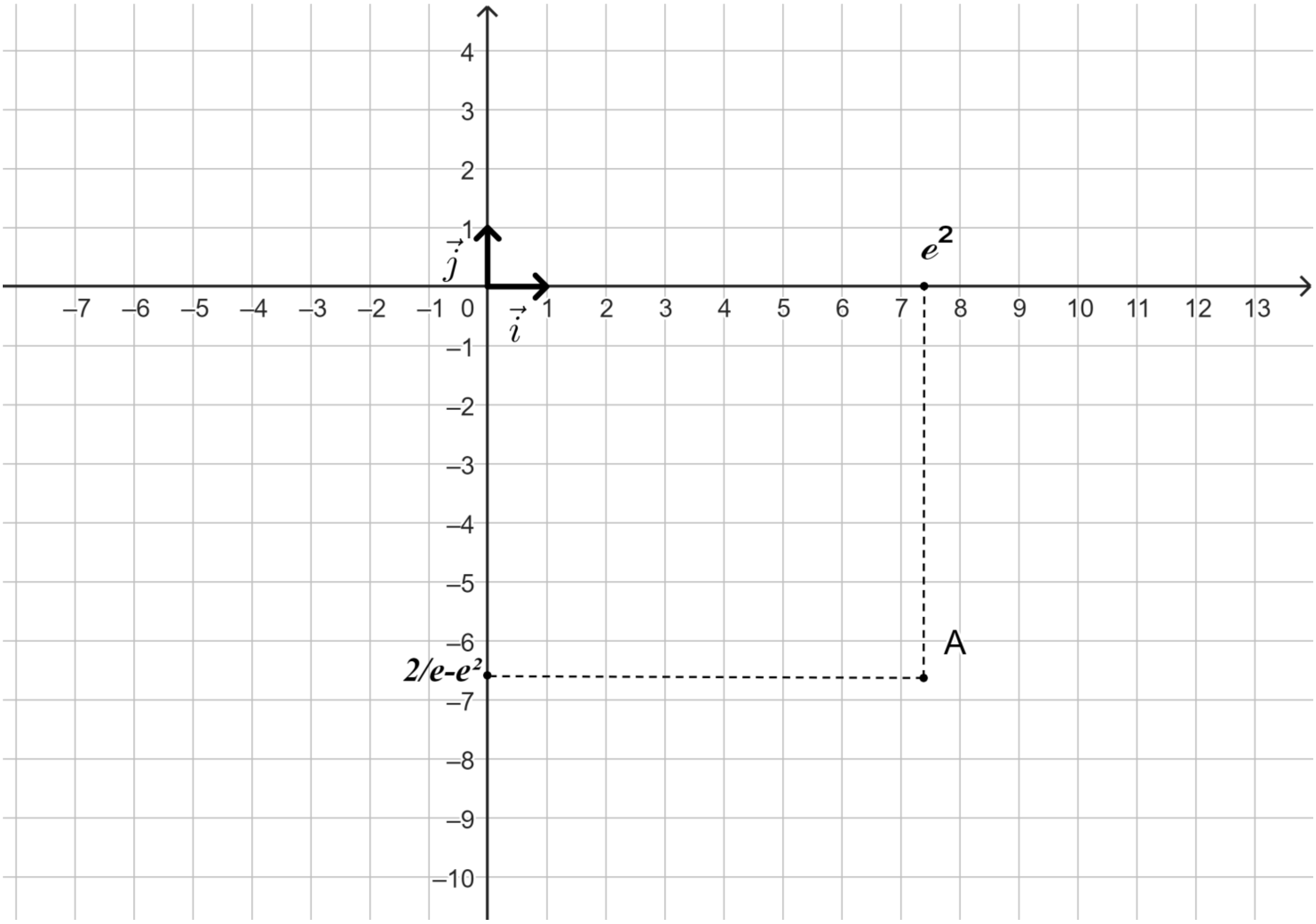


**Figure2**