Lycée Cité El Amal Gabes Année scolaire :2024/2025

Devoir de synthèse n°1

$4T_{1+2+3}$ (***Durée : 120 mn)*** ***Letaeif Adel + Med Taher Amloug +Saidi Sola***

N.B. *Commencez par l'exercice qui vous paraît " le plus facile "*

Exercice N° 1 : (8 points)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne dans l'annexe **figure 1** la représentation graphique dans un repère orthonormé les deux courbes (C) et(C′) de la fonction **f** et celle de sa fonction dérivée **f ′** . Notons que:

• Les droites y = −1 et y = 3 sont des asymptotes de (C) et la droite y = 0 est asymptote de (C′) .

• La courbe (C) n'admet aucune tangente horizontale et la courbe (C′) admet une seule tangente horizontale.

• (C) Passe par les point $A(0,1)$, $B\left(1,\frac{5}{2}\right)$, $C\left(2,\frac{11}{4}\right)$ et $D\left(3,\frac{29}{10}\right)$

• Le point $I\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ appartient à (C′).

1) a) Justifier que (C) est la courbe de f .

b) Déterminer **f ′(0) ; f ″(0)** ; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)-3}$

c) Montre que le point A(0, 1) est un point d'inflexion de la courbe (C) .

d) Donner une équation de la tangente (T) à (C) en A.

2) a) Déterminer **f ′ ([1,+∞[).**

b) En déduire que pour tout x ∈ [1,+∞[, $|f'(x)| \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) a) Montrer que l'équation **f(x) = x** admet une unique solution $\boldsymbol{\alpha}$ dans [1,+∞[et que α ∈]2, 3[.

b) Montrer que $f(x) \ge x \quad \forall\ x \in [1,\alpha]$

4) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $1 \le u_n \le \alpha$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante .

c) En déduire que est convergente et déterminer sa limite.

5) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{\sqrt{2}}{2}|u_n - \alpha|$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|u_n - \alpha| \le \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |1-\alpha|$

c) Déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite .

Exercice n°2 : **(5 points)**

Soit f la fonction définition sur]-∞,1] par $f(x)=\dfrac{-2}{1+\sqrt{1-x}}$

1) Etudier la dérivabilité de à gauche en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que $\forall x\in\left]-\infty,1\right[$ on a $f'(x)=-\dfrac{(f(x))^2}{4\sqrt{1-x}}$

b) Dresser le tableau de variation de sur]-∞,1].

3) a) Montrer que f réalise une bijection de]-∞,1] sur [-2,0[.

b) Déterminer $f^{-1}(-2)$. ,Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite de (-2) .

4) Vérifier $f^{-1}(-1)=0$. Montrer que f^{-1} est dérivable en -1 et déterminer $\left(f^{-1}\right)'(-1)$.

5) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x\in\left[-2,0\right[$

6) Tracer dans la **figure 2** de l'annexe la courbe de f^{-1}

Exercice n°3 : **(7 points)**

1) a) vérifier que $(\sqrt{2}+i)^2=4+8\sqrt{2}\,i$

b) Résoudre dans ℂ l'équation $z^2-2z-2\sqrt{2}i=0$.

2) pour tout nombre complexe z on pose $P(z)=z^3-(2+2i)z^2+(4-2\sqrt{2})iz-4\sqrt{2}$.

a) Calculer $P(2i)$.

b) Déterminer les nombres complexe a et b tels que $P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)$.

c) Résoudre dans ℂ l'équation $P(z)=0$.

3) le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.

On donne les points , A, B , C et D d'affixes $z_I=1$, $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $z_B=(1+\sqrt{2})+i$,

$z_C=(1-\sqrt{2})-i$ et $z_D=2i$.

a) Ecrire z_A sous forme exponentielle, puis construire le point A.

b) Vérifier que $\dfrac{z_B-z_D}{z_B-z_A}=1+\sqrt{2}$. Interpréter géométriquement ce résultat.

c) Vérifier que le point I est le milieu du segment [BC]

d) Construire les points B et C .

4) a) Vérifier que $z_A\times\bar{z}_B=2z_B$.

b) Ecrire z_B sous forme exponentielle.

Annexe (feuille à rendre avec la copie)

Nom et prénom :……………………………. ………………………………….4T……….

Figure 1 **(Exercice n°1)**

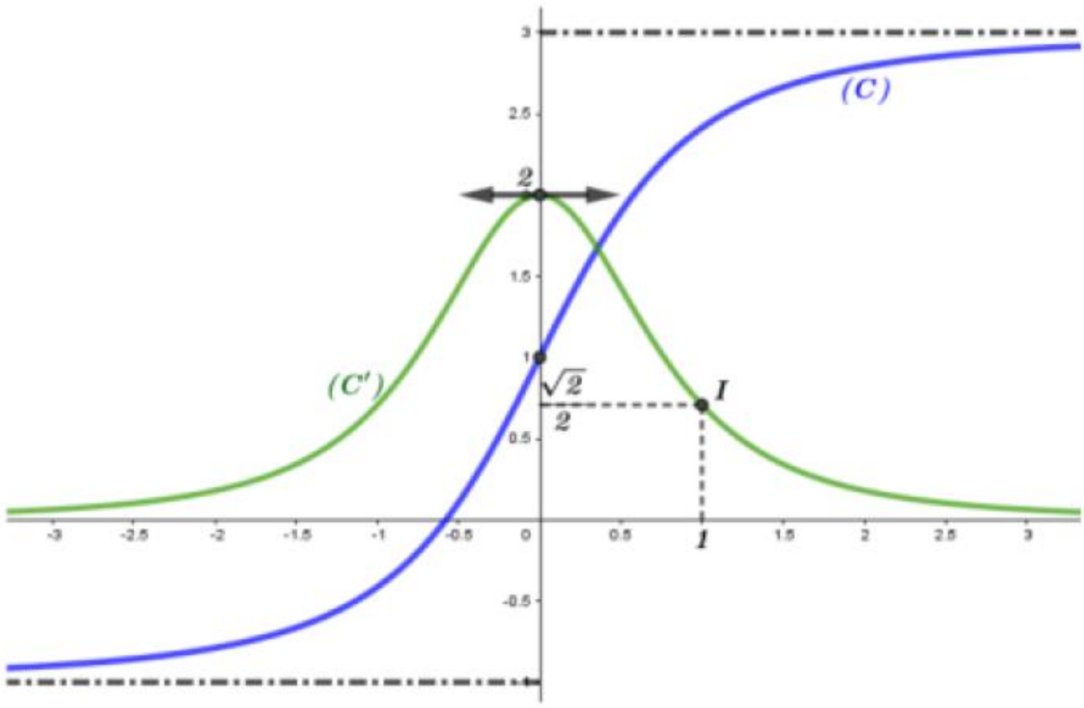

Figure 2 **(Exercice n°2)**