Kooli Mohamed Hechmi

Niveau : 4ème Sc Techniques

Date 2023 /2024 | **Durée : 2 heures**

Devoir de synthèse n°1 en mathématiques (type 1)

Exercice 1

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f et soit C_f sa représentation graphique

x	$-\infty$		-1			2		$+\infty$
$f(x)$	3	↘	$-\infty$ ‖	$-\infty$	↗	-1	↘	-3

1) **Déterminer le domaine de définition de f**
2) **Préciser les asymptotes à C_f**
3) **Déterminer avec justifications les limites suivantes :**

$\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$ **et** $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(\frac{2x^2+1}{x^2-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to -1} f\ o\ f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2} f\ o\ f(x)$;

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\ ,1]$ par $f(x) = -\sqrt{1-x}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) **a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat graphiquement.**
   b) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty\ ,1[$.
   c) Dresser le tableau de variation de f et tracer (C).
2) **a) Montrer f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.**
   b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à gauche en 0.
   c) Etudier la continuité et la monotonie de f^{-1} sur J.
3) **Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.**
4) **Soit g la fonction définie sur $]-\infty\ ,1]$ par $g(x) = f(x) - x$**
   a) Dresser le tableau de variation de g.
   b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]-\infty\ ,0]$ une unique solution α.
5) **a) Montrer que pour tout $x \in\ ]-\infty\ ,0]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$**
   b) Montrer que pour tout $x \in\ ]-\infty\ ,0]$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Exercice 3

1) Ecrire $\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)$ et $1+i\sqrt{3}$ sous la forme exponentielle.

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $2z^2-\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)z+1+i\sqrt{3}=0$.

On désigne par z_1 et z_2 les solutions de (E). Sans calculer z_1 et z_2

a) Montrer que : z_1 et z_2 sont non nulles.

b) Déterminer $arg(z_1+z_2)$ et $arg(z_1)+arg(z_2)$

2) a) Vérifier que 1 est une racine de l'équation (E).

b) Déduire l'autre racine de (E).

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_B=iz_A$

On désigne par I le milieu de $[AB]$ et on note z_I l'affixe de I.

a) Donner la forme exponentielle de z_A et z_B

b) Placer les points A ; B et I

4) a) Montrer que le triangle OAB est isocèle et rectangle.

b) En déduire que $OI=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OI}}\right)=\frac{7\pi}{12}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$.

c) Ecrire z_I sous la forme algébrique et en déduire la valeur exacte de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$