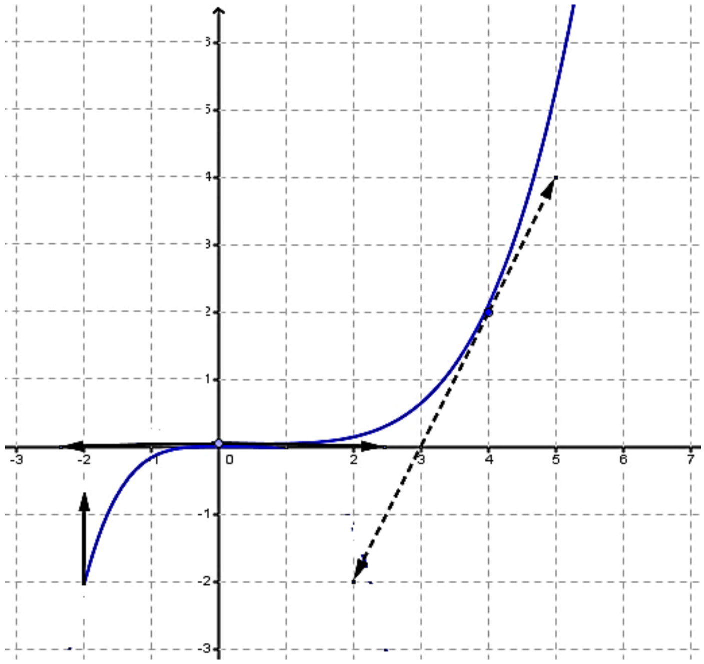
Mrs : Fathi B.Mbarek Afli Ahmed	Devoir de synthèse n°1 Mathématiques – Durée 2 heures	Lycée I. K. Jemmel 4Tec – 13/12/2022

Exercice 1 : (4 points)



Dans la figure ci-contre est représentée la courbe (Cf) d'une fonction f définie sur [-2 ; +∞[ainsi que la demi-tangente et les tangentes aux points d'abscisses respectives -2 ; 0 et 4.

La courbe (Cf) admet une branche parabolique de direction (OJ).

Par une lecture graphique :

1) Déterminer : f ' (0) ; f ' (4) et $\lim_{x\to -2^+} \frac{f(x)+2}{x+2}$

2) Justifier que f est une bijection de [-2;+∞[sur un intervalle J que l'on précisera.

3) Expliquer pourquoi f^{-1} est dérivable à droite en -2 et calculer $(f^{-1})'(-2)$

4) Déterminer $(f^{-1})'(2)$.

5) f^{-1} est-elle dérivable en 0 ? Justifier.

6) On admet que la fonction f est la dérivée d'une fonction g tel que g (0) =1

a) Donner le sens de variation de g.

b) Déduire le signe de g sur [-2 ;+∞[.

Exercice 2 : (4 points)

Soit la fonction f définie sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1 + \cos(\pi x)$

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Déduire que f réalise une bijection de $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Justifier que f^{-1} est dérivable à droite en 1 et donner $(f^{-1})'_d(1)$

2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur [1 ; 2 [et que

$(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{\pi\sqrt{2x - x^2}}$ pour tout x ∈ [0 ; 1[.

Exercice 3 : (6 points)

1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $Z^2 - 2Z + 1 - e^{4i\alpha} = 0$; $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

2) Dans le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points

I ; A ; B et C d'affixe respectives : $z_I = 1$; $z_A = 2$; $z_B = 1 + e^{2i\alpha}$ et $z_C = 1 - e^{2i\alpha}$.

a) Vérifier que les points A et B appartiennent au cercle (C) de centre I et de rayon 1.

b) Montrer que : $z_B = 2\cos\alpha\, e^{i\alpha}$ et $z_C = -2i\sin\alpha\, e^{i\alpha}$

c) Déduire la forme exponentielle des nombres complexes z_B et z_C

d) Montrer que OBAC est un rectangle.

e) Déterminer la valeur de α pour que OBAC soit un carré.

3) On pose $\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{3}}$

Résoudre, dans $\mathbb{C}$,l'équation : $Z^6 - 2z^3 + 1 - e^{i\frac{4\pi}{3}} = 0$

(Donner les solutions sous forme exponentielle)

Exercice 4 : (6 points)

Soit la fonction définie sur$]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

1) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$on a : $f'(x) = \frac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α puis

vérifier que $1 < \alpha < 2$

3) a) Montrer que pour tout $x \geq 1$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Monter que pour tout $x \geq 1$:$|f(x) - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|x - \alpha|$

4) Soit la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} f(\tan(x)) & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\\ 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

a) Etudier la continuité de g à gauche en $\frac{\pi}{2}$

b) Montrer que g est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

c) Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$; $g'(x) = \frac{-\mathrm{Cos}(x)}{\mathrm{Sin}^2(x)}$

d) Dresser le tableau de variation de g.