Devoir de synthèse n°1

Epreuve : Mathématiques
Niveau : 4ème SC-Techniques
Durée : 2 Heures

Direction régionale de
L'éducation Tozeur
A.S :2024/2025

Exercice n°1 : (03,5 Points)

I) Pour chaque question ci-après, cocher la bonne réponse
Aucune justification n'est demandée.

1) z est un nombre complexe qui s'écrit $z = x + iy$, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - z\bar{z} + 2 = 0$ est :

a: $\{i, -i\}$ b: $\{-1+i, 1+i\}$ c: $\{-1, 1\}$

2) Les racines carrées de nombre complexes i sont :

a: $\{1+i, 1-i\}$ b: $\left\{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right\}$ c: $\left\{\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right\}$

3) z est un nombre complexe tel que $z = -3\left(cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ alors :

a: $\arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ b: $\arg(z) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ c: $\arg(z) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

II) Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de f' la fonction dérivée de f
Pour chaque question ci-après, répondre par **vrai** ou **Faux**
Aucune justification n'est demandée.

1) La fonction f est une bijection de $]-\infty, -2]$ sur un intervalle J
2) La fonction f admet exactement deux extremums
3) La courbe (C_f) admet un seul point d'inflexion
4) Si $f(1) = 3$ alors pour tout $x \in [-2, 2]$; $|f(x) - 3| \leq \frac{2}{3}|x - 1|$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{3}$	↗	$\frac{2}{3}$	↘	0

Exercice n°2 : (03,5 Points)

La courbe (C_h) représentée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction h définie sur $[-3,3]$.On sait que h est continue sur $[-3,3]$ et dérivable sur $[-3,0]$ et sur $]0,3]$.

La demi-tangente à (C_h) au point $A(-3,-2)$ passe par le point $B(-2,-\frac{1}{2})$

1) Déterminer graphiquement $h'_g(0)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{h(x)}{x}$.

2) Déterminer $h'_d(-3)$.

3) a- Montrer que h réalise une bijection de $[-3,3]$ sur un intervalle J que l'on précisera

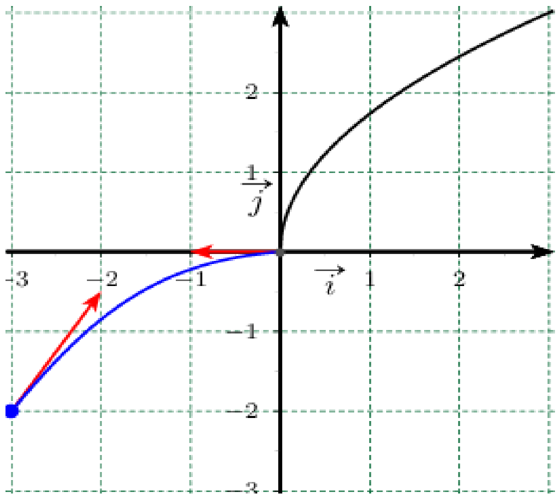
b- Déterminer $h^{-1}(-2)$.

Montrer que h^{-1} est dérivable à droite en (-2) et déterminer $(h^{-1})'(-2)$.

(h^{-1} est la fonction réciproque de h)

c- Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{h^{-1}(x)}{x}$

d- Tracer sur **l'annexe à rendre** la courbe Représentative de h^{-1}



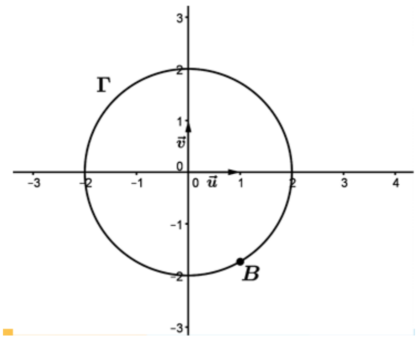
Exercice n°3 : (06 Points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Dans la figure ci-contre :

Γ est le cercle de centre O et de rayon 2

B est un point du cercle Γ tel que $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OB}}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$



1) a- Déterminer la forme exponentielle puis la forme algébrique de z_B l'affixe de B

b- En déduire que $z_B = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

2) On considère dans ₵ l'équation $(\boldsymbol{E})$: $z^2 - (\sqrt{3}+3i)z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$

a- Montrer que le discriminant △ de l'équation $(\boldsymbol{E})$ est égal à $2z_B$

b- Résoudre alors dans ₵ l'équation $(\boldsymbol{E})$

3) Soient les points A et D d'affixes respectifs $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_D = z_A + z_B$

a- Construire **(sur l'annexe à rendre)** les points A et D b- Montrer que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O

c- Prouver que AOBD est un carré puis déduire que $z_D = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$

d- Ecrire z_A sous forme algébrique. En déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

4) Soit Δ la droite passant par O et parallèle à (AB) qui recoupe le cercle Γ en un point M d'affixe z_M avec $Im(z_M) > 0$

a- Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

b- En déduire la forme exponentielle de z_M.

<u>Exercice n°4 :</u> (07 Points)

I) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

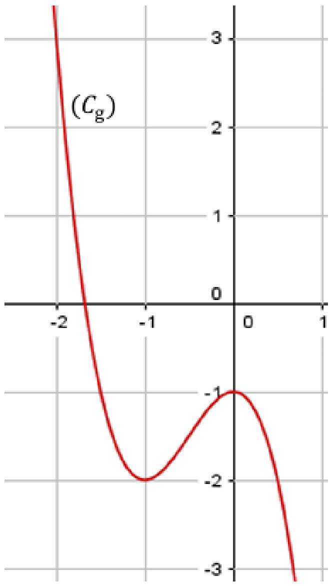
Dans la figure ci-contre ; (C_g) est la représentation graphique de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ Par $g(x) = -2x^3 - 3x^2 - 1$

Par lecture graphique :

1) Dresser le tableau de variations de la fonction g

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α ,donner un encadrement de α d'amplitude 0.1

3) Dresser le tableau de signe de $g(x)$ puis en déduire le signe de $g(-x)$



II) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$.

(C_f) est la représentation graphique de f et (P) est la représentation graphique de la fonction $x \to x^2 - 3x$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. .Interpréter graphiquement le résultat

2) Calculer $\lim\limits_{x\to -\alpha} \frac{f(x)-f(-\alpha)}{x+\alpha}$ .Interpréter graphiquement le résultat

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$;$f'(x) = \frac{g(-x)}{x^2}$

4) Dresser le tableau de variation de f

5) Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - (x^2 - 3x)]$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - (x^2 - 3x)]$

Interpréter graphiquement le résultat

6) Etudier la position relative de(C_f) par rapport à (P)

7) Montrer que $f(-\alpha) = 3\alpha^2 + 6\alpha$ puis trouver un encadrement de $f(-\alpha)$

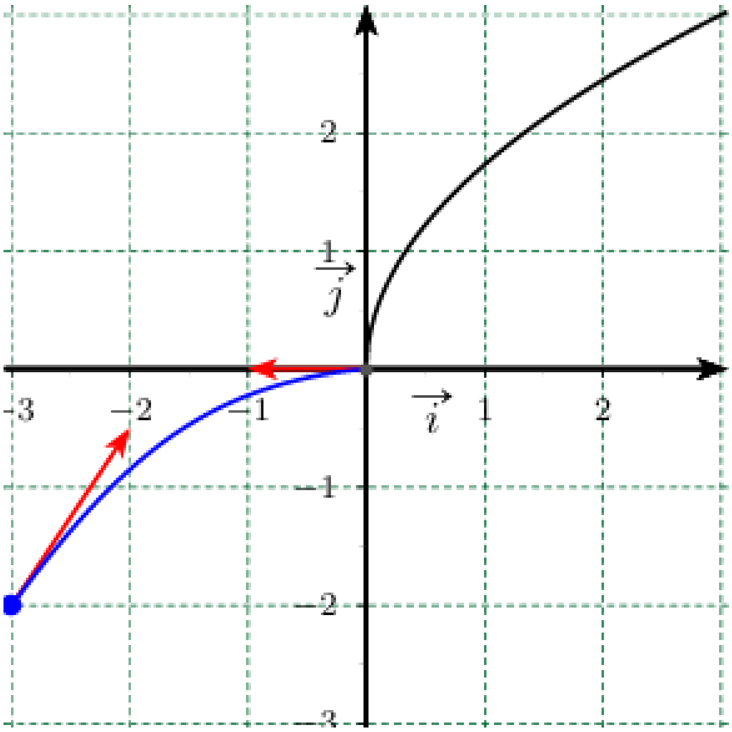
8) Calculer$f(1)$. On prend $\alpha = -1.65$,calculer $f(-\alpha)$ puis tracer (C_f) **(sur l'annexe à rendre)**

Annexe à rendre

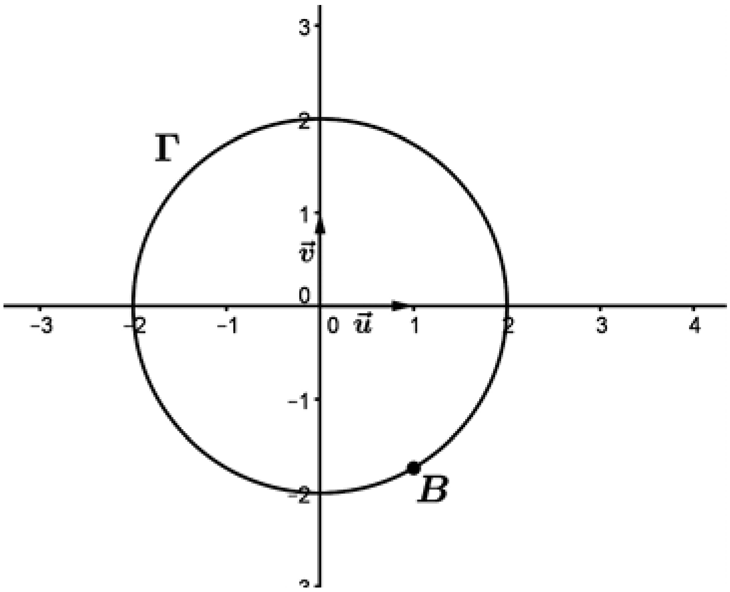
Nom et prénom :

....$\mathbf{4^{ème}}$ ***techniques***.......
.

Exercice n°2 :



Exercice n°3 :



Exercice n°4 :