| Epreuve : MATHEMATIQUES | Devoir de synthèse N°1 | Commissariat régional Tunis 1 |
|---|---|---|
| 13 Décembre 2023 | ************************** Sujet commun | Niveau : 4ème Année ******** Section: Sciences techniques |
| | Durée : 2 h | |

**Le sujet comporte 4 pages dont l'annexe page 4 est à rendre avec la copie.**

## Exercice N°1: (4 points)

**Pour chacune des questions suivantes, recopier le numéro et la lettre correspondante à la réponse exacte (une seule réponse est correcte). Aucune justification n'est demandée :**

1/ Un argument du nombre complexe $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ est égal à:

a) $\frac{\pi}{12}$ b) - $\frac{\pi}{12}$ c) $\frac{\pi}{6}$

2/ La forme algébrique du nombre complexe $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ est :

a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ b) $\frac{1-\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ c) $\frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

3/ Le module du nombre complexe $e^{i\frac{\pi}{3}} + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ est égal à:

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{2}$ c) 2

4/ Dans un repère orthonormé, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et -i.

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z-1}{z+i}$ soit réel est :

a) La médiatrice de [AB] \ {B} b) Le cercle de diamètre [AB] \ {B} c) La droite (AB) \ {B}

## Exercice N°2: (4 points)

La courbe $C_f$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, donnée **en annexe (Figure 1)**, est la représentation graphique d'une fonction *f* définie sur IR.

On sait que :

- La droite Δ d'équation $y = 2x + 4$ est un asymptote oblique à $C_f$ en $+\infty$.
- La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à $C_f$ en $-\infty$.
- La courbe $C_f$ admet deux tangentes aux points d'abscisses -3 et -1.
  La courbe $C_f$ admet une demi-tangente T et une demi-tangente verticale au point d'abscisses -4.

1) Déterminer graphiquement :

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ , $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x]$.

b) $f'(-1)$, $f'(-3)$ et $f'_d(-4)$.

2) a) *f* est-elle dérivable à gauche en -4 ? Déterminer alors $\lim_{x\to(-4)^-} \frac{f(x)+2}{x+4}$.

b) Montrer qu'il existe un réel unique $\alpha \in ]-4,-3[$ tel que $f(\alpha)=0$.

3) Soit *h* la restriction de *f* sur l'intervalle $[-1,+\infty[$.

a) Montrer que *h* réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire, dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ , la courbe de la fonction $h^{-1}$.

**<u>Exercice N°3:</u> (6 points)**

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :$(E)$: $z^2-(1+2e^{i\theta})z+e^{i\theta}+e^{2i\theta}=0$ où $\theta\epsilon]0,\pi[$

2) Soit $P(z)= z^3-2(1+e^{i\theta})z^2+(1+3e^{i\theta}+e^{2i\theta})z-(e^{i\theta}+e^{2i\theta})$ , $\theta\epsilon]0,\pi[$

a) Vérifier que 1 est une racine de l'équation $P(z)=0$.

b) Résoudre alors l'équation $P(z)=0$.

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixe respectives : $z_A=e^{i\theta}$ , $z_B=1+e^{i\theta}$ et $z_C=1$ , $\theta\epsilon]0,\pi[$.

a) Prouver que $z_B=2cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

b) Montrer que le quadrilatère OABC est un losange.

c) Soit S l'aire du losange OABC. Montrer que $S=sin\theta$.

4) Déterminer $\theta$ pour que le triangle ABC soit équilatéral.

5) On prend $\theta=\frac{\pi}{3}$

Donner une construction des points A, B et C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.**(Figure 2)**

**<u>Exercice N°4:</u> (6 points)**

On considère la fonction f définie sur $IR$ par $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+x-1}{x-1} & si\ x\epsilon]-\infty,0] \\ 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} & si\ x\in[0,+\infty[ \end{cases}$.

On note $C_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé R=$(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)a) Montrer que f est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 0.

Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) Soit $h$ la restriction de $f$ sur $]-\infty, 0]$.

a) Montrer que pour tout $x \in ]-\infty, 0]$ $on\ a : h(x) = x + 2 + \frac{1}{x-1}$

b) En déduire que la droite $D: y = x + 2$ est un asymptote oblique à la courbe *de h* .

c) Etudier la position relative de D et $C_h$ la courbe de $h$ .

3)a) Calculer $\mathrm{h}'(x)$ et en déduire que h est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$.

b) Montrer que h réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur un intervalle J à préciser.

c) Montrer que pour tout $x \in$ J on a : $\mathrm{h}^{-1}(x) = \frac{x-1-\sqrt{x^2-6x+5}}{2}$

4) Soit g la restriction de $f$ sur $[0, +\infty[$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat trouvé.

b) Montrer que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\mathrm{g}'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

c) Dresser le tableau de variation de g.

d) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans $[0, +\infty[$ une unique solution $\alpha$

et que $\alpha \in ]1,2[$.

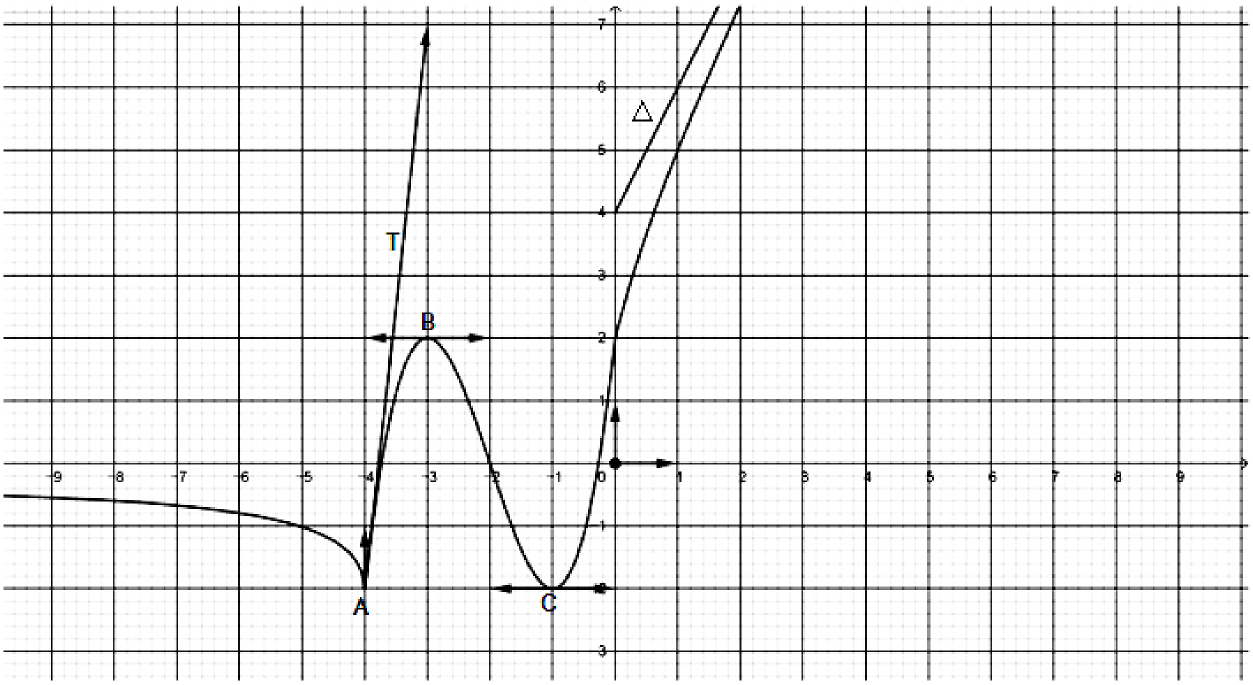
5)a) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a : $|g'(\mathrm{x})| \leq 1$.

b) En déduire que $x \in [0, +\infty[$ $|g(x) - \alpha| \leq |x - \alpha|$.

| Annexe à rendre avec la copie |
| --- |
| **Nom ........................................... Prénom …………........... ............ Classe : ............... N°.......** |

## Exercice N°2 :

### Figure 1




## Exercice N°3 :

### Figure 2