Devoir de contrôle n° 2

Exercice1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{\ln(\sqrt{x})}$, et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Répondre par vrai ou faux en justifiant :

a) $D_f = \left]0, +\infty\right[$,

b) la ccourbe C_f admet une asymptote oblique..

c) la ccourbe C_f admet une asymptote verticale.

d) pour tout $x \in D_f$, on a : $f(x) < \frac{x}{2}$.

e) pour tout $x \in D_f$, on a : $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x(\ln x)^2}$

Exercice2

I. Soit g la fonction définie sur $\left]0, +\infty\right[$ par : $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$

1) Etudier les variations de g.

2) En déduire que pour tout $\in \left]0, +\infty\right[$, on : $g(x) > 0$.

II. Soit f la fonction définie sur $\left]0, +\infty\right[$ par : $f(x) = x - 1 + 2\frac{\ln x}{x}$ On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a/ Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b/Démontrer que pour tout $x \in \left]0, +\infty\right[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

c/ Dresser le tableau de variation de f

2) a/Montrer que la droite $\Delta : y = x - 1$ est une asymptote à C_f .

b/Etudier la position de C_f par rapport à Δ.

3) Tracer Δ et C_f .

4) Déterminer la primitive F de f sur $\left]0, +\infty\right[$ qui vérifie $F(1) = 0$.

Exercice3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. on considère les droites :

$$D_1 : \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 4\alpha \end{cases} , \ \alpha \in IR \qquad \text{et} \qquad D_2 : \begin{cases} x = \beta \\ y = 2 + 2\beta \\ z = 1 + 5\beta \end{cases} , \beta \in IR .$$

1) Montrer que les droites D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires.

2) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P contenant D_1 et *parallèle à* D_2 est : $X + 2y - z - 5 = 0$.

3) Montrer qu'une équation cartésienne du plan Q contenant D_2 et perpendiculaire à p est :
$2x - y + 2 = 0$.

4) Déterminer le point I d'intersection de la droite D_1 et du plan Q.

5) a/Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par I et perpendiculaires au plan P.

b/ Déterminer le point J d'intersection de Δ et D_2.

c/Calculer la distance I J

6) on considère le plan R : $3x + 2y - 2z = 0$

a/Vérifier que R et P sont sécants.

b/ Soit $D = P \cap R$. Trouver une représentation paramétrique de la droite D.

c/Etudier la position relative da la droite D_1 et du plan R.