L.P.B.T. *4 ème année* Date: 2*4 / 10 / 2024* ***Prof : Trabelsi Chokri***	***Devoir de controle N°1*** *Section :* ***Sciences Tech.*** *Epreuve :* ***Mathématiques*** *Durée:* ***2 h***

Exercice 1 : (4 points)

Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_1 = -\cos(\theta)\, e^{i\theta}$ et $z_2 = i\sin(\theta)\, e^{i\theta}$.

1. a) Justifier que les points O, M_1 et M_2 ne sont pas alignés .

   b) Vérifier que $OM_1^{\,2} + OM_2^{\,2} = M_1M_2^{\,2}$.

   c) En déduire que les points M_1 et M_2 appartiennent à un même cercle (Γ) dont on déterminera le rayon et l'affixe z_I du centre I .

   Construire le cercle (Γ) sur l'annexe fourni.

2. Déterminer , en fonction de θ un argument de z_1 puis en déduire une construction du point M_1 puis de M_2 pour $\theta = \frac{\pi}{6}$.

3. Déterminer la valeur θ_0 de θ pour laquelle l'aire $\mathcal{A}$ du triangle OM_1M_2 est maximale .

4. a) Déterminer l'affixe du point A pour que le quadrilatère OM_IAM_2 soit un rectangle .

   b) Déterminer la valeur de θ pour laquelle OM_IAM_2 est un carré .

Exercice 2 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x} & si\ x \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & si\ x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\end{cases}$$

1. Etudier la limite de f en 0 .
2. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1 .
4. Montrer que f est continue sur $]1, +\infty[$.
5. a) Montrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$.

   b) En déduire $f(\,]-\infty, 0[\,)$.

6. Soit g la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = f\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$.

   a) Déterminer la limite de g à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

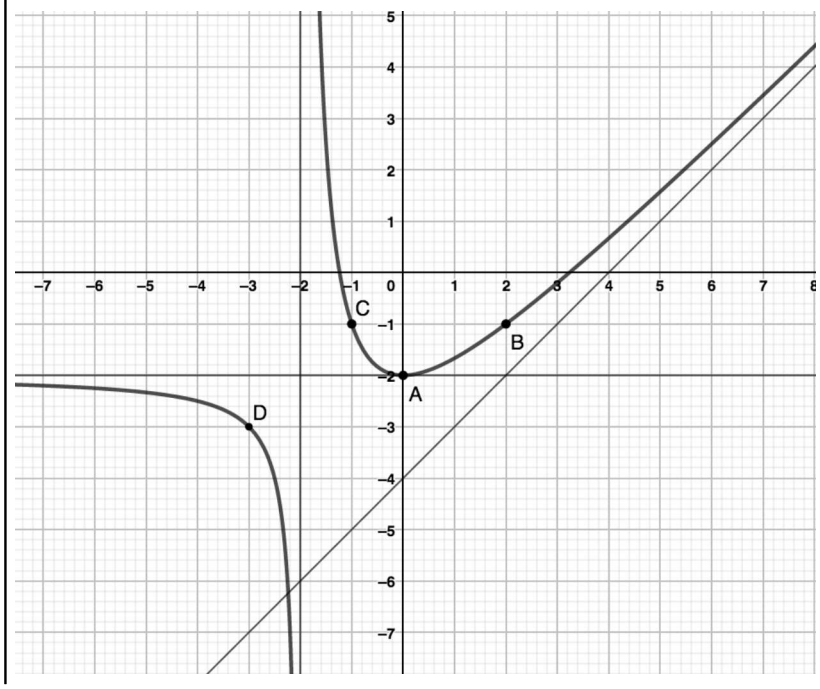
   b) Montrer que g est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 3 : (6 points)

Dans le plan rapporté à un repère orhtonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère ci-dessous la courbe (C_f) : représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ et dérivable sur $]-\infty,-2[$ et sur $]-2,+\infty[$.

On donne :

- Les droites $\Delta_1 : y=-2$, $\Delta_2 : x=-2$ et $\Delta_3 : y=x-4$ sont des asymptotes à (C_f)
- Les points $A(0,-2)$, $B(2,-1)$, $C(-1,-1)$ et $D(-3,-3)$ sont des points de (C_f).
- $\Delta_1 : y=-2$ est la tangente à (C_f) en A



1. Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x+4)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{f(x)}{f(x)+2}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0-}\left(\dfrac{x}{f(x)+2}\right)$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f\circ f$.
3. On désigne par h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x)=\begin{cases} f\circ f(x) & si\ x\in\mathbb{R}\backslash\{-2,0\} \\ -2 & si\ x=-2 \end{cases}$.
   a) Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0}h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$.
   b) Etudier la continuité de h à droite et à gauche en (-2).
   c) On désigne par α la solution négative de l'équation $f(x)=0$. Déterminer $f(]-2,\alpha])$.
   d) Montrer que h est strictement décroissante sur $]-2,\alpha]$.
4. a) Montrer que h est continue sur $]0,2[$ et déterminer $h(]0,2[)$.
   b) Montrer que la fonction : $\varphi : x\mapsto h(x)-f(x)$ garde un signe constant sur $]0,2[$

Exercice 4 : (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

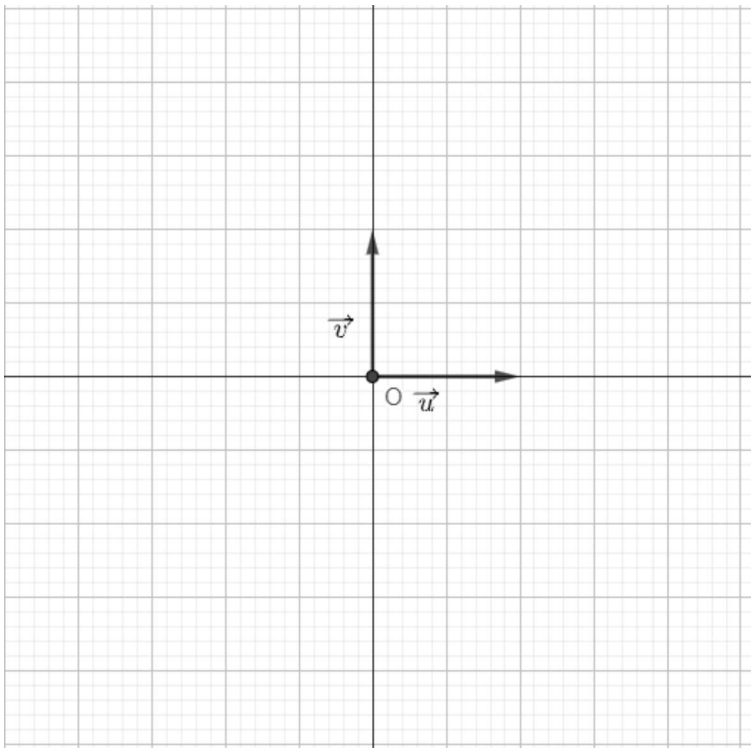
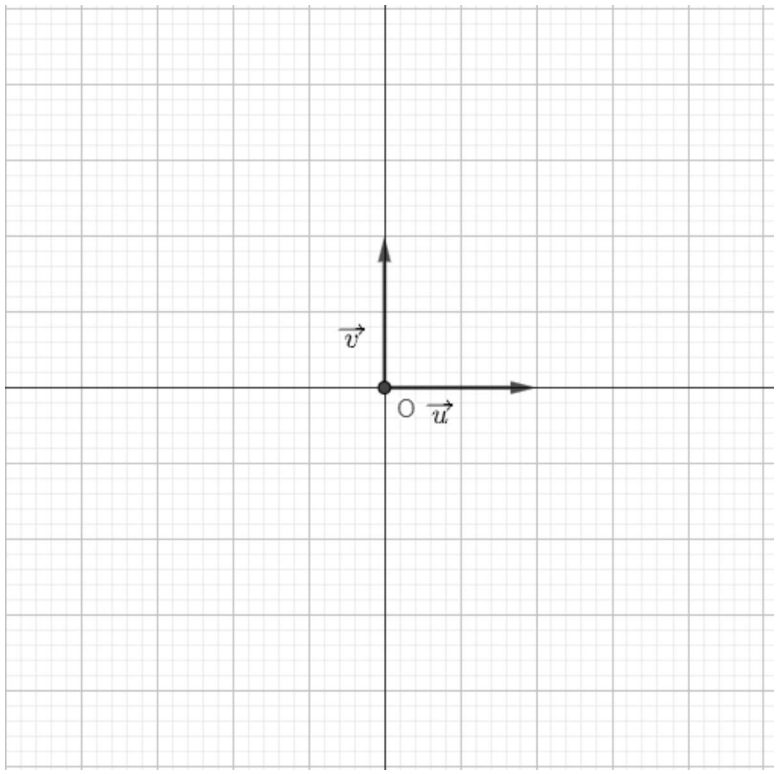
On considère les points A et B d'affixes respectives i et $\dfrac{1+i}{2}$.

A tout point $M(z)$ on associe le point $M'(z')$ tels que $z'=(1-i)z-1$.

1. Déterminer l'ensemble (E) des points $M(z)$ tel que $|z'|=2\sqrt{2}$. Construire l'ensemble (E) sur l'annexe fournie
2. On suppose que $M\neq B$.
   a) Montrer que $arg(z')\equiv-\dfrac{\pi}{4}+\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}}\right)[2\pi]$.
   b) En déduire l'ensemble (F) des points $M(z)$ tels que z' soit un réel strictement négatif .
   c) Construire l'ensemble (F) sur le même repère .
3. On suppose que $M\neq A$.
   a) Montrer que le triangle AMM' est rectangle et isocèle en M .
   b) Les ensembles (E) et (F) se coupent en un point C. Construire le point C ' associé au point C.

Nom et prénom : .....

Exercice 2



Exercice 4 :