

Exercice n 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes , une seule réponse est correcte.La relever .

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (8x^2 + 4) \cos\left(\frac{1}{2x^2 + 1}\right) - 8x^2 - 4$ est égal à : **a** $\frac{1}{2}$ **b** 0 **c** 4
- 2) La forme algébrique de $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{2028}$ est : **a** 1 **b** $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{1}}{2}i$ **c** -1
- 3) Si $f(x) = x^3 - \frac{1}{16}x + 1$ et $g(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ alors $\lim_{x \rightarrow 2^+} f \circ g(x) =$
a $-\infty$ **b** $+\infty$ **c** 1

Exercice n 2 (7 points)

- 1) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par Γ le cercle de centre O et de rayon 1 et A est le point d'affixe $z_A = -1$ et les points B et C d'affixes respectives : $z_B = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_C = -z_B$.
Écrire z_B sous forme algébrique. Placer le point A et construire les points B et C.
- 2) Soient les points M_1 et M_2 d'affixes respectives : $Z_1 = \left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right) + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $Z_2 = \left(\frac{\sqrt{2}-2}{2}\right) - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
a) Vérifier que A est le milieu du segment $[M_1M_2]$.
b) Prouver que le quadrilatère OAM_1B est un losange puis construire les points M_1 et M_2 .
c) Calculer l'aire du losange OAM_1B .
- 3) Montrer que $(\vec{u}, O\vec{M}_1) = \frac{7\pi}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.
- 4) Soit M un point du plan d'affixe $z_M = e^{i\theta}$ où $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$.
a) Vérifier que $M \in \Gamma$, en déduire que MBC est un triangle rectangle en M.
b) Soit S l'aire du triangle MBC. Montrer que $S = \frac{1}{2}|e^{i2\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}|$.
- 5) **a)** Vérifier que $e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}[e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})} + e^{-i(\theta-\frac{\pi}{4})}] = e^{i2\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}$.
b) En déduire que $S = \cos(\theta - \frac{\pi}{4})$. Déterminer la valeur de θ pour laquelle S est maximale.
c) Déterminer les valeurs de θ pour que l'aire du triangle MBC soit le double de celle de ABM_1 .

Exercice n 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{x^2 \sin(2/x)}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

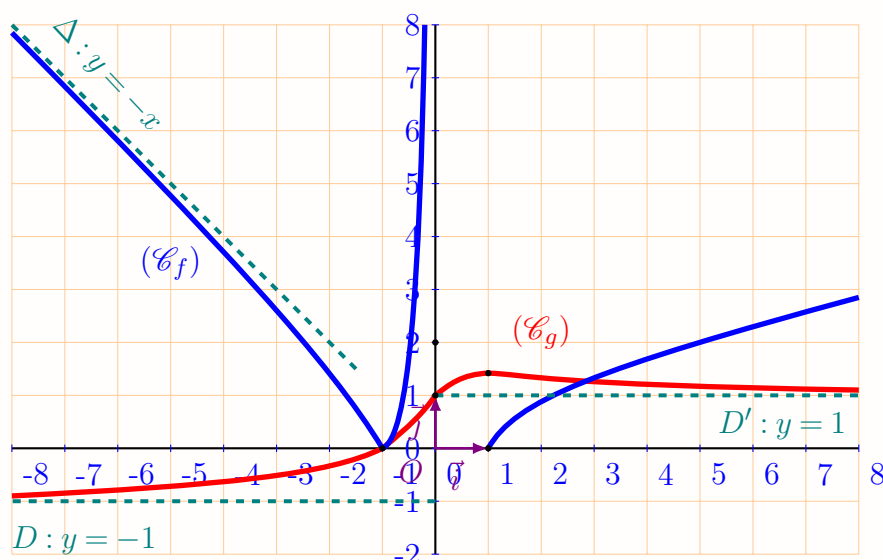
- 1) **a)** Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $\frac{-x^2}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{x^2}{x+1}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
b) f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
- 2) **a)** Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.

- b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Interpréter le résultat graphiquement .
- 3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $] \frac{4}{3\pi}, \frac{4}{\pi} [$.
- 4) Soit g la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = f\left(\frac{1}{x-1}\right)$.
- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- b) Montrer que g est continue sur $]1, +\infty[$.

Exercice n 4 (5 points)

Dans le graphique ci-dessous on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$ en gras la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f continue sur $] -\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. En rouge on a représenté la courbe $\mathcal{C}_g$ d'une fonction g continue sur $\mathbb{R}$. On sait que la droite $\Delta : y = -x$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction celle de $(O, \vec{i})$ au voisinage de $+\infty$. On sait aussi que $(O, \vec{j})$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$.

$\mathcal{C}_g$ admet deux asymptotes les droites d'équations respectives $D : y = -1$ et $D' : y = 1$. On donne $g(1) = \sqrt{2}$.



- 1) Par lecture graphique
- a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(f(x))$.
- b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^-} x f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{1-g(x)}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(g(x))$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(g(x))$.
- c) Dresser le tableau de variation de f . Déterminer $f([-1, 0[)$ et $g(\mathbb{R})$.
- 2) Soit h la fonction définie par $h(x) = f \circ g(x)$. On note Γ la courbe de h .
- a) Déterminer l'ensemble de définition de h .
- b) Étudier les branches infinies de Γ . Résoudre l'équation $h(x) = 0$.
- 3) Soit k la fonction définie par : $k(x) = g \circ f(x)$.
- a) Déterminer l'ensemble de définition de k .
- b) Déterminer $k(]-\infty, 0[)$.