Devoir de contrôle n 1

Exercice n 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes , une seule réponse est correcte.La relever .

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(8x^2+4)\sin(\dfrac{1}{2x^2+1})$ est égal à :

a $+\infty$ **b** 1 **c** 4

2) La forme algébrique de $\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2025}$ est :

a $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **b** $-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **c** -1

3) Si $f(x)=x^3-3x+1$ et $g(x)=\dfrac{x+2}{2-x}$ alors $\lim\limits_{x\to2^+} f\circ g(x)=$

a $-\infty$ **b** $+\infty$ **c** 0

Exercice n 2 (6.5 points)

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)$.

Soit les points A , B et C d'affixes respectives : $z_A=1+i\sqrt{3}$, $z_B=-\sqrt{3}+i$ et $z_C=1-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+1)$

1) **a)** Montrer que A et B appartiennent au cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 2 .

b) En déduire une construction des points A et B .

2) **a)** Ecrire z_A et z_B sous la forme exponentielle. En déduire que $\dfrac{z_A}{z_B}=-i$

b) Montrer , alors , que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O.

3) **a)** Vérifier que $z_C=z_A+z_B$. En déduire que $OACB$ est un carré puis construire le point C

b) Déterminer la forme exponentielle de z_C . En déduire les valeurs exactes de $cos(\dfrac{7\pi}{12})$ et $sin(\dfrac{7\pi}{12})$.

4) A tout point M du plan d'affixe $z\neq0$, on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=i\dfrac{z}{z_A}$

a) Déterminer l'ensemble $(\mathcal{C}')$ des points M' du plan tels que M appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

b) On pose $z=1-e^{i\theta}$, ou $\theta\in]-\pi,\pi]$

i) Vérifier que $z=-2isin(\dfrac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$. En déduire que $z'=sin(\dfrac{\theta}{2})e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3})}$

ii) Déterminer alors θ pour que les points O ,A et M soient alignés .

Exercice n 3 (6.5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt{x}cos(x)}{x+1} & si\quad x\geq0\\ \dfrac{x^2}{2(\sqrt{x^2+1}-1)} & si\quad x<0\end{cases}$

On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

1) **a)** Montrer que pour tout réel $x \geq 0$ on a : $\dfrac{1-\sqrt{x}}{x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1+\sqrt{x}}{x+1}$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat .

2) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2f(x)+x$ puis Interpréter graphiquement les résultats.

3) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

4) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to0^+} f(\dfrac{1}{\sqrt{x}})$, $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} f(\dfrac{1}{cos(x)})$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ f(x)$

5) **a)** Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution $\alpha \in]\dfrac{\pi}{2},\pi[$

b) Montrer que $tan(\alpha) = -\sqrt{\alpha-1}$

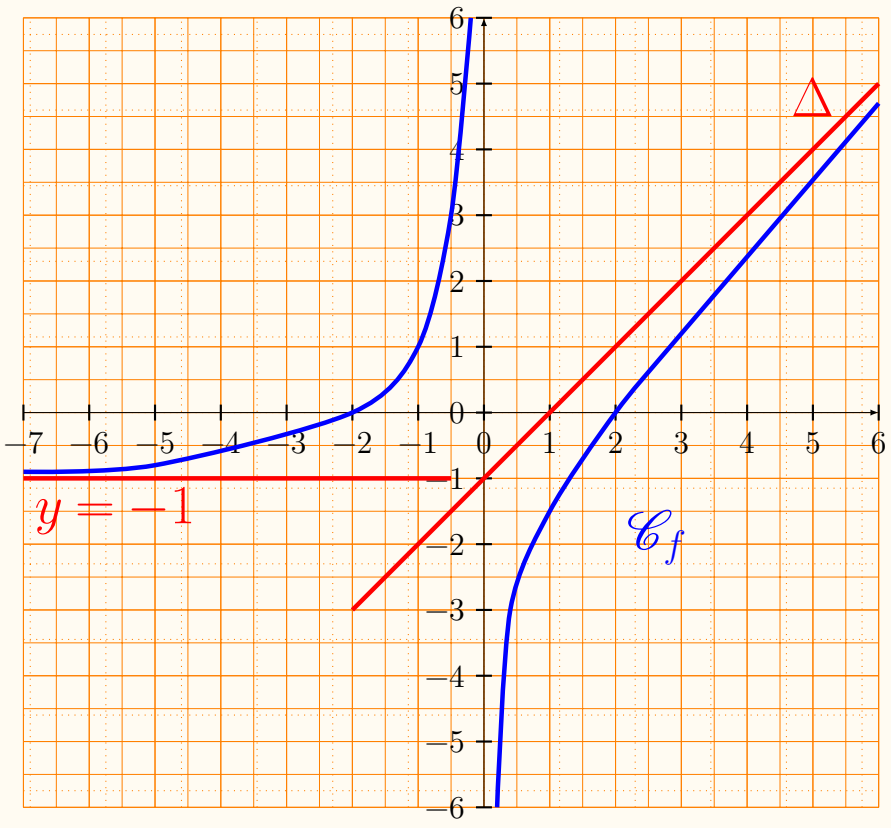
Exercice n 4 (4 points)

Dans la figure ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

- Les droites d'équations : $y=-1$ et $x=0$ sont des asymptotes à $\mathscr{C}_f$.
- La droite $\Delta : y=x-1$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

1) **a)** Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x)$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$.

b) Calculer : $\lim\limits_{x\to0^+} x\cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to0^+} \left(f\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{3}{f(x)-1}$ et $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{f(x)-3}{f(x)}$.

c) Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{2f(x)+2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-5}{3f(x)-3x+3}$

2) Déterminer les images des intervalles suivants par f : $f(]-\infty,-1])$, $f\circ f([-1,0[)$ et $f(]0,2])$.