Devoir de contrôle n 1

Exercice n 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes , une seule réponse est correcte.La relever .

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(9x^3+6)^2\cos(\frac{1}{3x^3+2})-(9x^3+6)^2$ est égal à :

a $+\infty$ **b** $-\frac{1}{2}$ **c** $-\frac{9}{2}$

2) La forme algébrique de $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2025}$ est :

a $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b** 1 **c** -1

3) Si $f(x)=-4x^3-3x+7$ et $g(x)=\frac{x+7}{3-x}$ alors $\lim\limits_{x\to3^+} f\circ g(x)=$

a $+\infty$ **b** $-\infty$ **c** 0

Exercice n 2 (7 points)

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Soit les points A et B d'affixes respectives : $z_A=1+i\sqrt{3}$ et $z_B=-\sqrt{3}+i$

1) **a)** Ecrire z_A et z_B sous la forme exponentielle.

b) En déduire une construction des points A et B .

c) Montrer , que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O.

2) Soit le point C tel que : $z_C=z_A+z_B$

a) Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un carré puis construire le point C .

b) Déterminer la forme exponentielle de z_C .

c) En déduire les valeurs exactes de $cos(\frac{7\pi}{12})$ et $sin(\frac{7\pi}{12})$.

3) A tout point M du plan d'affixe $z\neq0$, on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=i\frac{z}{z_A}$

a) Déterminer l'ensemble $(\mathscr{C}')$ des points M' du plan tels que M appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 2 .

b) On pose $z=1-e^{i\theta}$, ou $\theta\in]-\pi,\pi]$

i) Vérifier que $z=-2isin(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$. En déduire que $z'=sin(\frac{\theta}{2})e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3})}$

ii) Déterminer alors θ pour que les points O ,A et M soient alignés .

Exercice n 3 (6 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{x^2}{4}+x}-\frac{x}{2}+\frac{1}{2} & \text{si } x\le -4,\\ \frac{x^2-x+3a}{x^2+7x+12} & \text{si } -4\le x\le -3,\\ \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)}{\pi\left(1-\sqrt{x+4}\right)} & \text{si } x\ge -3,\end{cases}$

où a est un réel. Soit (Γ) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer le domaine de définition de f et signaler les problèmes de limites.

2) **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$.

b) Pour quelle valeur de a , $\lim\limits_{(-3)^-} f$ est finie ?

c) Pour cette valeur de a, f est-elle prolongeable par continuité en (-3) ? Justifier la réponse

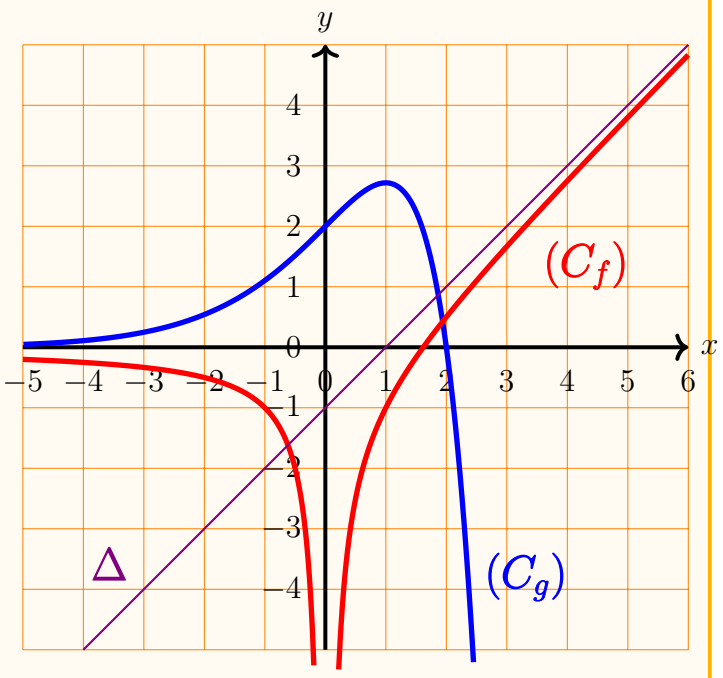
d) Pour la valeur de a trouvée, étudier la continuité de f en -4 et interpréter graphiquement le résultat. Déduire le domaine de continuité de f

3) **a)** Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, et $\lim\limits_{x\to -\infty}(f(x)+x)$. - Interpréter graphiquement les résultats.

b) Étudier la branche de (Γ) au voisinage de $+\infty$.

Exercice n 4 (4 points)

Dans le graphique ci-contre , dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$, on a tracé les courbes représentatives (C_f) et (C_g) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.



1) **Par une lecture graphique déterminer :**

a) $g(]-\infty,0])$; $f(]-\infty,0[)$; $f(]0,+\infty[)$, $g([2,+\infty[)$ et $g\circ f(]-\infty,0[)$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$,

$\lim\limits_{x\to +\infty}(2f(x)-2x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{f(x)-x+1}\right)$,

et $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{g(x)}{x}\right)$

c) Montrer que l'équation $x-g(x)=1$ admet une unique solution α . Donner un encadrement de α à l'unité

2) Soit h la fonction définie par : $h(x)=g(x)-f(x)$ .On désigne par (C_h) sa courbe représentative dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$.

a) Etudier le signe de $h(x)$

b) Déduire $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{h(x)}\right)$