

Kooli Mohamed Hechmi	Niveau : 4 ^{ème} Sc Techniques	
	Date 2023 /2024	Durée : 2 heures
Devoir de contrôle n°1 en mathématiques		

Exercice 1

1) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives : i ; $1 - i$; $5 + i$ et $4 + 3i$

2) Montrer que $ABCD$ est un rectangle.

3) A tout point M du plan d'affixe $z \neq 1 - i$ on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz+1}{z-1+i}$

a) Montrer que $|z'| = \frac{AM}{BM}$

b) En déduire que si M' appartient au cercle trigonométrique alors M appartiendra à une droite que l'on précisera.

4) a) Montrer que $(z' - i)(z - 1 + i) = 2 + i$ et que $AM' \times BM = \sqrt{5}$

b) Montre que si M appartient à un cercle de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle que l'on précisera.

Exercice 2

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont la courbe est ci-contre :

1) Déterminer graphiquement

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

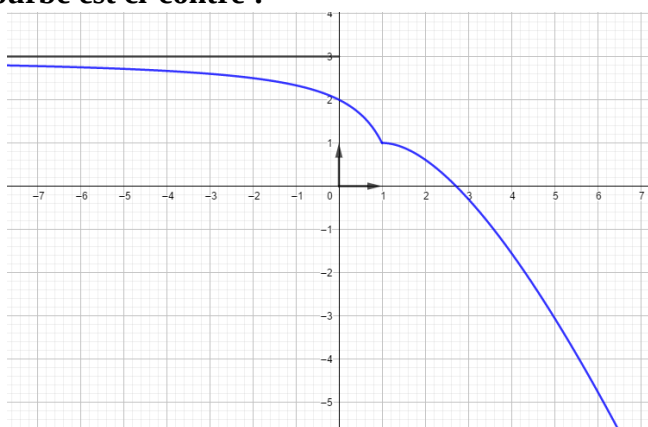
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

2) Reprendre par vrai ou faux

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(\sqrt{1-x}) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 f\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x)f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 0$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} xf\left(\frac{x-1}{x^2+2}\right) = +\infty$ e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x)f\left(\frac{x^2-1}{x}\right) = -\infty$



Exercice 3

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x - \sin x}{1 + x^2}$

1) Déterminer le domaine de définition de f

- 2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $\frac{x-1}{1+x^2} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{1+x^2}$
- b) En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- c) Interpréter les résultats graphiquement
- 3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $]-\pi, \pi[$

Exercice 4

On donne les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -1 + 4i$, $z_B = 2 + 2i$ et $z_C = -i$

- 1) a) Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle.
- b) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un carré.
- 2) Soit le point E d'affixe $z_E = 1 + i\sqrt{3}$.
- a) Donner le module et un argument des complexes z_B et z_E .
- b) Déduire le module et un argument de $z_B z_E$.
- c) Ecrire sous forme algébrique le complexe : $z_B z_E$.
- d) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$
- 3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z + i| = |z|$.