

Exercice 1 : (5 pts)

Dans le graphique donné en **annexe**, C_f est la courbe représentative d'une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- ✓ La droite $\Delta: y = x - 4$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$
- ✓ La droite $\Delta': y = 1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$
- ✓ La droite $D: x = 1$ est une asymptote à C_f

A l'aide du graphique et des renseignements fournis :

1) Déterminer :

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$.

c) En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)-1}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)-x+4}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos[f(x)]}{f(x)}$.

2) Déterminer les images par f des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

3) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de g .

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$.

Exercice 2 : (6 pts)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) a) Montrer que pour tout $x < 0$: $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

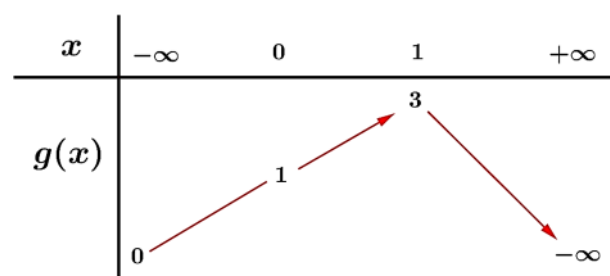
3) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

4) On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]1, +\infty[$ une solution unique α .

b) Calculer $g \circ f(-1)$ et $f \circ g(1)$.

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f \circ g)(x)$.



Exercice 3 : (4 pts)

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $i, -1$ et 1 .

A tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z+1}{z-i}$ ($z \neq i$).

- 1) a) Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit réel.
b) Déterminer l'ensemble de point M tel que z' soit imaginaire pur.
- 2) a) Montrer que pour tout $z \neq i$ on a : $OM' = \frac{BM}{AM}$.
b) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit la médiatrice de segment $[AB]$.
- 3) a) Montrer que $|(z' - 1)(z - i)| = \sqrt{2}$.
b) En déduire l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit le cercle de centre A est de rayon $\sqrt{2}$

Exercice 4 : (5 pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soient les points A et B d'affixes respectives $a = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ et $b = 2e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

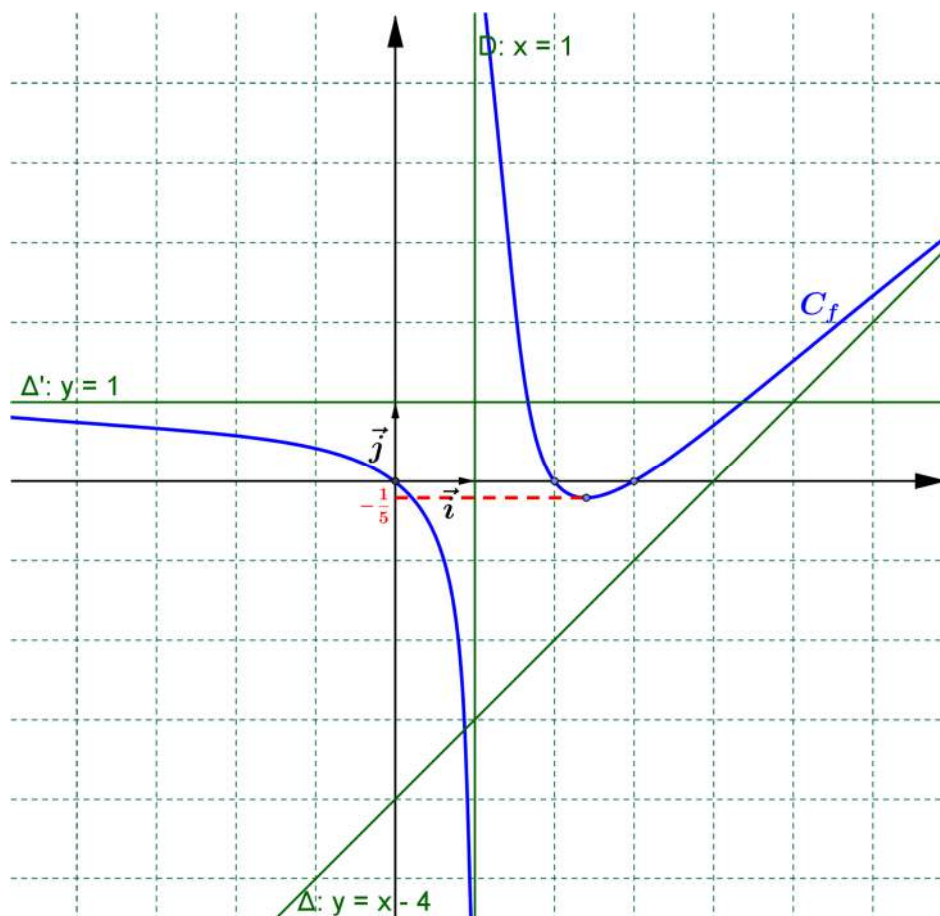
- 1) a) Ecrire a sous forme exponentielle.
b) Montrer que $b = ae^{i\frac{\pi}{3}}$.
c) En déduire que OAB est un triangle équilatéral.
d) Placer le point A puis le point B sur le cercle de centre O et de rayon 2 (**voir annexe**).
- 2) Donner la forme algébrique de b et en déduire $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.
- 3) Soit C le point tel que $OACB$ soit un losange.
a) Montrer que l'affixe de C est $z_C = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.
b) Calculer l'aire du losange $OACB$.

Annexe

Nom et prénom :

Classe : 4 Sc.Tech

Exercice 1 :



Exercice 4 :

