Lycée Cité El Amal Gabes — Année scolaire :2025/2026

Devoir de contrôle n°1

$4T_{1+2+3}$ (***Durée : 120 mn***) ***Letaeif Adel + Med Taher Amloug +Saidi Sola***

Exercice N^0 :2 (6 pts)

On considère la suite (U_n) définie sur ℕ par $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{1+U_n^2} \quad \forall\ n \in IN \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN$; on a : $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$

b) Montrer que (U_n) est croissante.

c) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite

3) a- Montrer que pour tout $n \in ℕ$, $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{2}{5}|u_n - 1|$.

b- En déduire que pour tout $n \in ℕ$, $|u_n - 1| \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

c- Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Pour tout $n \in IN^*$ on pose : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, $V_n = \dfrac{S_n}{n}$ et $W_n = \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$

Montrer que pour tout entier naturel k, on a: $1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^k \leq u_k \leq 1$.

En déduire que pour tout entier naturel n ,on a : $n - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n \leq S_n \leq n$

b- Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$.

Exercice N^0 :2 (7 pts)

1) Soit l'équation $(E): z^2 - 2z + 1 + i = 0$

a) Vérifier que $\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^2 = -4i$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2) Le plan le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.on désigne par (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1 et A le pont d'affixes -1

a) Construire les points B et C d'affixes respectives $z_B = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_C = -\overline{z_B}$

b) Ecrire z_B sous forme algébrique.

3) Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_1 = \left(\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}\right) + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right) - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

a) Vérifier que A est le milieu du segment $[M_1M_2]$

b) Montrer que le quadrilatère OAM_1B est un losange, puis construire les points M_1 et M_2

4) Soit M le point d'affixe $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$

a) Vérifier $M \in (\Gamma)$ en déduire que MBC est un triangle rectangle en M.

b) Soit S l'aire du triangle MBC. Montrer que $S = \dfrac{1}{2}\left|e^{i2\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}\right|$

5) a) Vérifier que $e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}\left(e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})} + e^{-i(\theta-\frac{\pi}{4})}\right) = e^{i2\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) En déduire que $s = \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ '

c) Déterminer la valeur de θ pour laquelle S est maximale.

<u>EXERCICE N°3 :</u> (7 points)

Sur la figure ci-dessous est tracée la courbe représentative notée (*Cf)* dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$d'une fonction *f* définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ On sait que :

− La droite D d'équation *y* = - 2*x-1* est asymptote à la courbe (*Cf)* en (-∞) .

− La droite d'équation *x* = -1 est asymptote à la courbe (*Cf)* .

− (Cf) admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$ au voisinage de -∞

_ les points $A\left(-\dfrac{3}{2},0\right), B\left(-\dfrac{1}{2},0\right), C(0,1)$ et $D(1,2)$ sont des points de (Cf)

À partir du graphique:

1) Déterminer

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{x^2+3} + x - 4$. On désigne par (Cg) sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que la droite d'équation :y= - 4 est une asymptote à (Cg) au voisinage de **(- ∞).**

b) Montrer que la droite d'équation :y= 2x- 4 est une asymptote à (Cg) au voisinage de **(+ ∞).**

3) a) Montrer que la fonction $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) la fonction est –elle prolongeable par continuité en 1 ?

4) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \begin{cases} (x+1)\sin\left(\dfrac{\pi}{x+1}\right) - 3 & \text{si } x \succ -1 \\ g(x) & \text{si } x \le -1 \end{cases}$

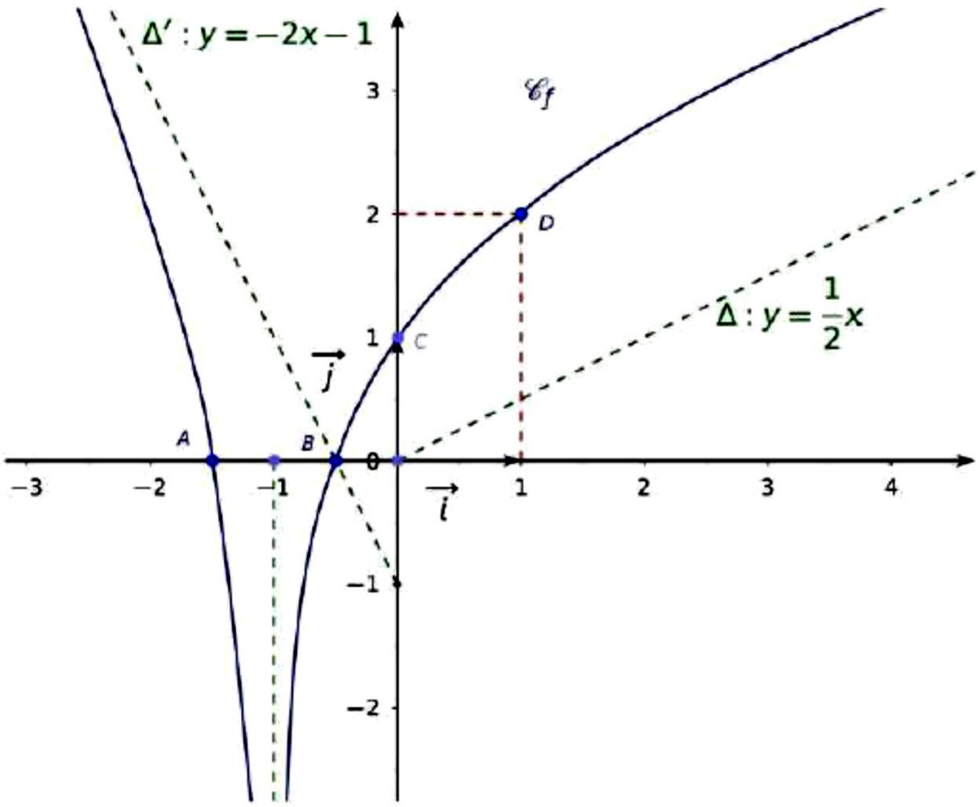
a) Montrer que pour tout $x \succ -1$,on a $-x-4 \le h(x) \le x-2$.

b) En déduire que h est continue en -1.

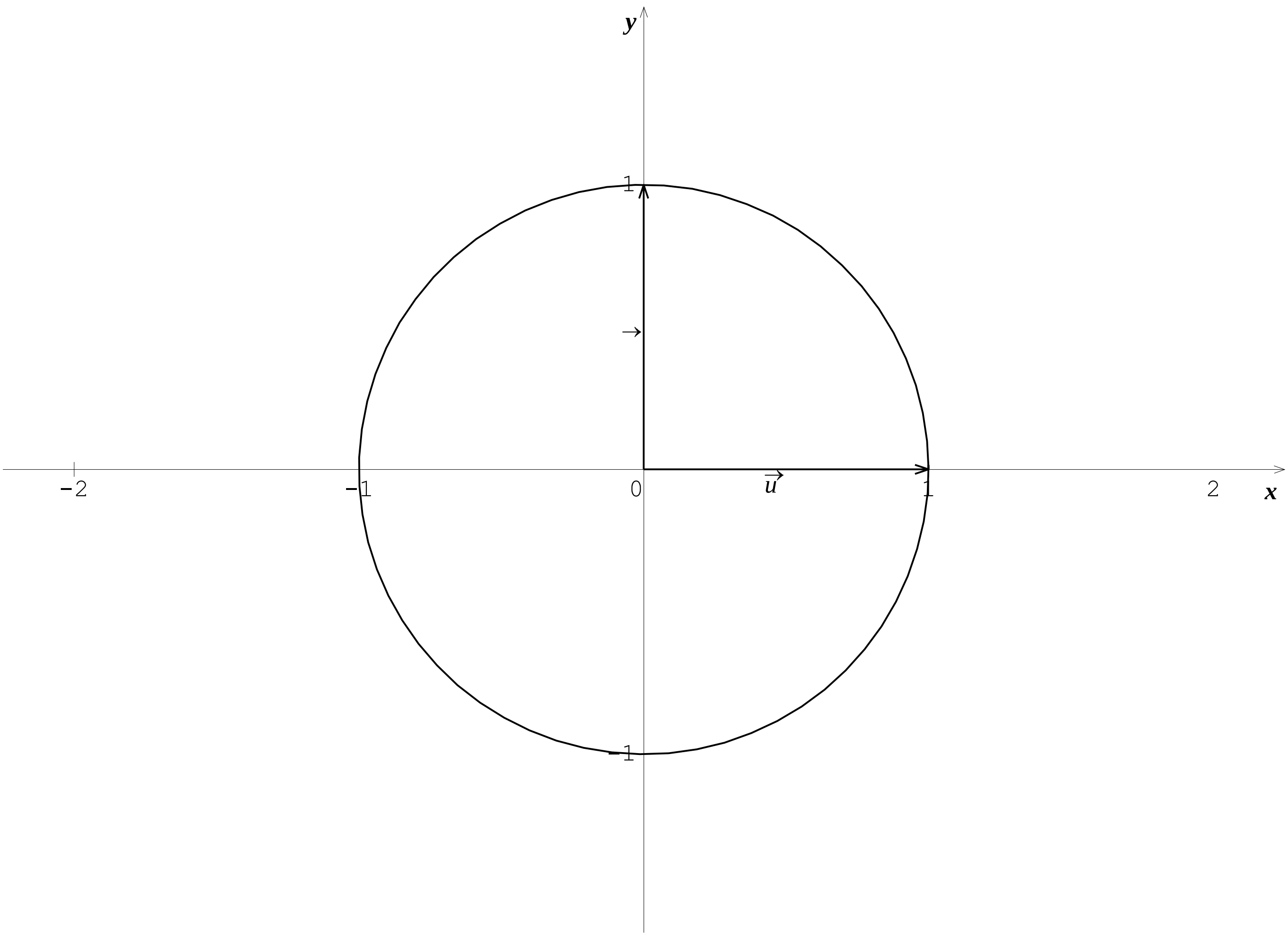
c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

5) a) Montrer que l'équation $h(x) = -2$ admet au moins une solution α dans $]0,1[$.

b) Montrer que $tg\left(\dfrac{\pi}{\alpha+1}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha}}$



$\Delta' : y = -2x - 1$
$\mathscr{C}_f$
D
$\Delta : y = \frac{1}{2}x$
C
$\vec{j}$
A
B
$\vec{i}$



y
x
$\vec{u}$