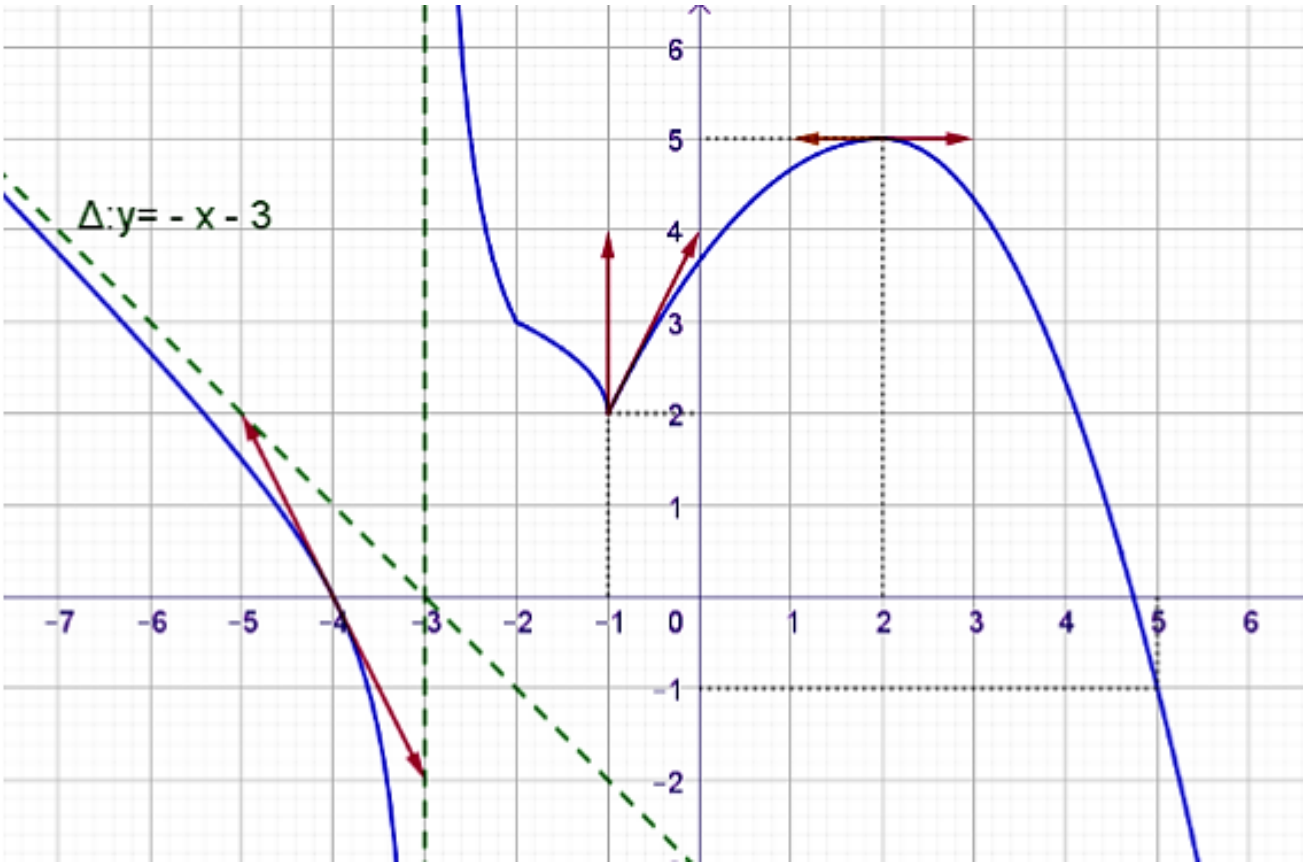
Lycée I. K. Jemmel Classe : 4ème Tec2	Devoir de Contrôle n°1 Mathématiques – Durée 2h	Mr : Afli Ahmed A.S : 2024/2025

Exercice 1 : (3.5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

La courbe (Cf) ci-dessous représente une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

- La courbe (Cf) admet une branche parabolique de direction $(O ; \vec{\jmath})$ au voisinage de $+\infty$.
- La droite d'équation y = - x - 3 est une asymptote oblique à (Cf) au voisinage de $-\infty$
- La droite d'équation x = - 3 est une asymptote verticale à (Cf).



1) Par une lecture graphique :

a) Déterminer : fofof(2) ; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{2x}$

b) Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2024}{f(x)+x+3}$ et $\lim\limits_{x\to-3^-} \frac{2024}{fof(x)}$

c) Déterminer : $f'(-4)$; $f'(2)$ $f'_d(-1)$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{f(x)-2}{x+1}$

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = f\left(\frac{2(\cos x - 1)}{x^2}\right)$

Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 2 : (7.5 points)

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \pi + \dfrac{x - \sin(\pi x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x+1} - \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que f est continue en 0.

2) a) Vérifier que pour tout $x \in]-\infty; 0[$ on a : $\pi + \dfrac{x+1}{x} \leq f(x) \leq \pi + \dfrac{x-1}{x}$

b) Déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4) a) Montrer que f est continue sur $]0; +\infty[$.

b) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution α dans $]0; 1[$.

c) Vérifier que : $\alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha = 1$.

Exercice 3 : (5.5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$ .Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1 + \sqrt{3}$ - i (1 - $\sqrt{3}$) , $z_B = 2 + 2i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - \sqrt{3}$ + i (1 + $\sqrt{3}$)

1) a) Vérifier que $z_C = iz_A$.En déduire que le triangle OAC est rectangle et isocèle en O.

b) Vérifier que $z_B = z_A + z_C$ .En déduire que OABC est un carré.

2) a) Vérifier que : $z_B = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) **Construire** le point B puis les points A et C. (***annexe page 3***)

c) Montrer que $z_A = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

d) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Exercice 4 : (3.5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$

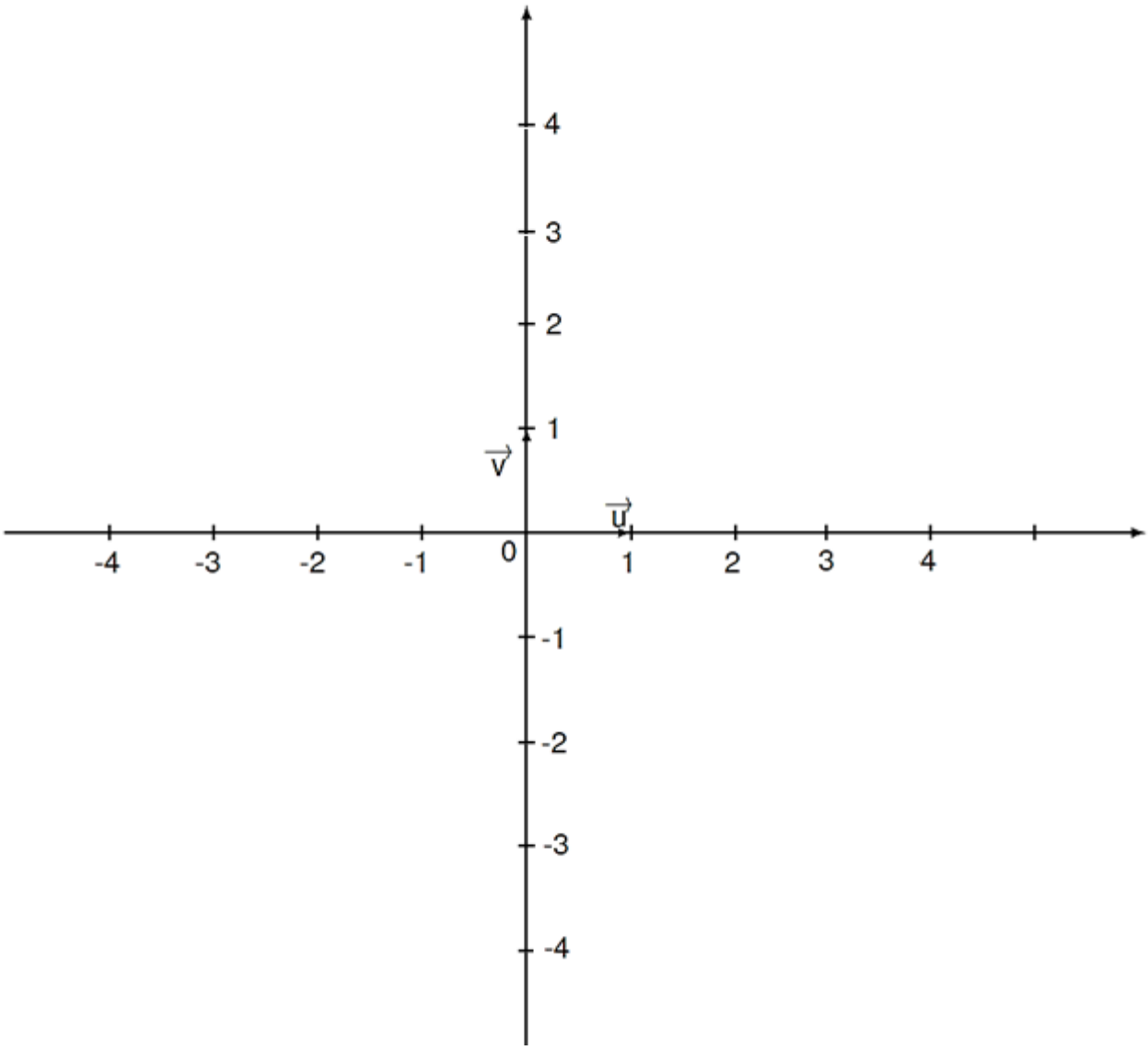
Soit A(3i) , K(i) ; B(4) ; M(z) et M' le point d'affixe $z' = \dfrac{iz+3}{z-4}$

1) Montrer que $(z'$- i) (z - 4) = 3 + 4i

2) a) Déduire que KM'.BM = 5

b) Montrer que si M' décrit le cercle de centre K et de rayon 2 alors M décrit un ensemble à déterminer.

3) a) Montrer que $|z'| = \dfrac{AM}{BM}$

b) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit la médiatrice de [AB].

Exercice 3 :