

Exercice 1 (5 points)

Répondre par vrai ou faux à chacune des assertions suivantes sans justification :

- 1) L'équation $\sqrt{1-x} = x-1$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.
- 2) L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x} < x$ est $]1, +\infty[$.
- 3) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points $A(-1, 1)$ et $B(3, 2)$.
 - a) Pour tout réel α , le point $M(4\alpha - 5, \alpha)$ appartient à (AB) .
 - b) Le vecteur $\vec{j}$ est de composantes $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \overrightarrow{AB})$.
 - c) $OM = \sqrt{2}$ si et seulement si $\alpha = 1$ ou $\alpha = \frac{23}{17}$.

Exercice 2 (5 points)

- 1) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes :
 $(E_1): \frac{2x+1}{\frac{1}{2}-|x|} = 2$; $(E_2): |x+3| = 2x$ et $(E_3): \frac{\sqrt{x+2}}{x} = 1$.
- 2) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations suivantes : $(I_1): \frac{2x}{x-1} \leq 1$ et $(I_2): |2x-1| > 2|x|$.

Exercice 3 (4 points)

Soit l'équation $(E): \sqrt{2}x^2 - x - \sqrt{2} = 0$.

- 1) Justifier que (E) admet deux racines distinctes α et β .
- 2) Donner la valeur exacte de chacun des réels $A = \alpha^{25}\beta^{26} + \alpha^{26}\beta^{25}$ et $B = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$.
- 3) a) Vérifier que $\sqrt{2}$ est une racine de (E) .
b) En déduire l'autre racine.
- 4) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $(I): \sqrt{2}x^2 - x - \sqrt{2} \geq 0$.

Exercice 4 (6 points)

- 1) Placer les points $A(-2, 1)$; $B(2, 3)$; $C(-1, -1)$ et $D(-5, -3)$.
- 2) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
- 3) a) Montrer que $(AB) \perp (AC)$.
b) En déduire que l'aire de $ABCD$ est égale à 10 unités d'aire.
- 4) a) Déterminer, en justifiant, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD}$ dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
b) Vérifier que $\vec{j} \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.
c) Déterminer alors les composantes de $\vec{i}$ dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- 5) Déterminer un vecteur $\vec{u}$ unitaire et colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ (On le donnera par ses composantes dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$).