Série dérivabilité $4^{ème}$ Sc Techniques

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[-1\,,1]$ par $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

1) a) Montrer que f est continue sur $[-1\,,1]$.

b) Montrer que f est dérivable sur $]-1\,,1[$.

2) a) La fonction f est-elle dérivable à gauche en 1 ? est-elle dérivable à droite en -1 ?

Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3) a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in\,]-1\,,1[$.

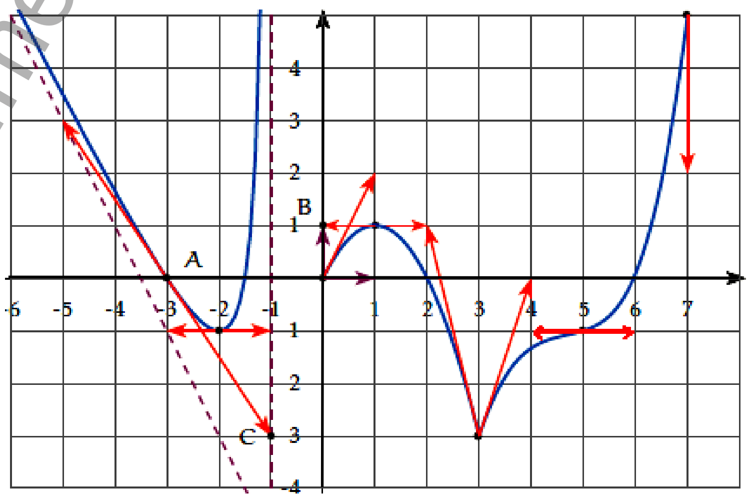
b) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f

Exercice 2

On a tracé ci-contre, C_f la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]-\infty\,,-1[\, \cup\, [0\,,7]$

La droite $\Delta : y = -2x - 7$

est une asymptote à C_f au voisinage $(-\infty)$.



1) a) Déterminer par lecture graphique

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{f(x)}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x$

$f'(-3)$; $f'(-2)$; $f'(1)$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to3^+} \frac{f(x)+3}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to3^-} \frac{f(x)+3}{x-3}$ et $\lim\limits_{x\to7^-} \frac{f(x)-5}{x-7}$

b) La fonction f est-elle dérivable en 3 ?

c) Déterminer le point d'inflexion de C_f et déduire $f''(5)$.

2) Ecrire une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse (-3).

3) Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels f est dérivable.

4) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2+1} & \text{si } x \le 0 \\ f(x) = x^3 - 3x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et soit (C) sa courbe représentative

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) a) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Justifier que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,,0[$ et $]0\,,+\infty[$ et calculer $f'(x)$

3) a) Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que $\forall x \in\,]-\infty\,,0[$ on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ et déduire le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty\,,0[$

c) dresser le tableau de variation de f.

Exercice 4

A) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{x+2}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Etudier les variations de f.

b) Déterminer l'image de l'intervalle $]0,+\infty[$ par f

c) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=f(x)-x$

c) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α et que $\alpha=2$

2) a) Montrer que $\forall x\in[2,+\infty[$ on a : $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$

b) En déduire que $\forall x\in[2,+\infty[$ on a : $|f(x)-2|\leq\frac{1}{2}|x-2|$

Exercice 5

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2-3x} & \text{si } x\leq 0 \\ f(x)=\frac{3}{2}x^2+\sin(x^2) & \text{si } x>0 \end{cases}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) Etudier la continuité de f en 0.

2) Montrer que f est continue sur $]-\infty,0[$.

3) On pose $\forall x>0$ $U(x)=x^2$ et $V(x)=\sin(x^2)$

a) Ecrire V sous la forme d'une fonction composée.

b) En déduire que f est continue sur $]0,+\infty[$.

4) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x$

c) En déduire que la droite d'équation $y=-x+\frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$

5) Montrer que $\forall x>0$ on a : $f(x)\geq\frac{3}{2}x^2-1$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

6) Etudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

7) a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty,0[$ et calculer $f'(x)$.

b) Montrer que $\forall x>0$ on a : $f'(x)=3x+2x\cos(x^2)$.

8) Dresser le tableau de variation de f

Exercice 6

1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x^3-3x^2-1$

a) Dresser le tableau de variation de g

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution $\alpha\in\left]\frac{3}{2},2\right[$

c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

2) Soit la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1-x}{x^3+1}$ et soit (C) sa courbe représentative.

a) Montrer que pour tout $x\in]-1,+\infty[$ on a : $f'(x)=\frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Etudier les branches infinies de (C)

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,,1]$ par $f(x) = -\sqrt{1-x}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) **a)** Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty\,,1[$.

c) Dresser le tableau de variation de f et tracer (C).

2) Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,,1]$ par $g(x) = f(x) - x$

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]-\infty\,,0[$ une unique solution α.

3) **a)** Montrer que $\forall x \in\,]-\infty\,,0]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

b) Montrer que $\forall x \in\,]-\infty\,,0]$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Exercice 8

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x + 1 - \cos\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) **a)** Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $x \leq f(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) **a)** Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$

c) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

4) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,,0[$ et $]0\,,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 2x + \frac{1-\cos(x^2)}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) **a)** Montrer que f est continue en 0.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x$.

b) Montrer que $\forall x \in\,]-\infty\,,0[$ on a : $2 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 2 + \frac{2}{x^2}$

c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

3) **a)** Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0.

c) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,,0[$ et $]0\,,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

4) Préciser le sens de variation de f sur $[0\,,+\infty[$.

5) Soit la fonction g définie sur $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x)=\frac{1}{\sin x}$

a) Etudier les variations de g et en déduire $g\left(\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right]\right)$.

b) Soit la fonction h définie sur $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $h(x)=f\left(\frac{1}{\sin x}\right)$

c) Montrer que h est dérivable sur $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ et que $\forall x\in\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ on a : $h'(x)=-\frac{\cos x}{(\sin x)^2}\times f'\left(\frac{1}{\sin x}\right)$

d) Préciser le sens de variation de h.

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur $[-1\,,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{2}}$

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en -1.

b) Montrer que $\forall x\in\,]-1\,,+\infty[$ on a : $f'(x)=\frac{1}{4f(x)}$ et en déduire le sens de variation de f.

c) Montrer que $\forall x[0\,,1]$ on a : $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$

Exercice 11

Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse proposée est exacte.

1) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tel que f (1)=2 alors

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\frac{x-1}{x}\right)=+\infty$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\frac{x-1}{x}\right)=2$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1$

2) f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f'(2)=0$ alors :

a) La courbe de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2.

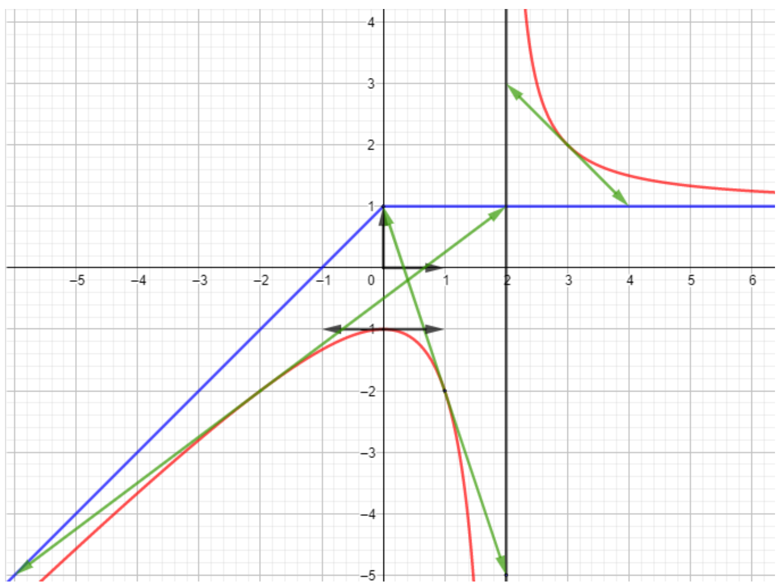
b) La courbe de f admet une tangente vertical au point d'abscisse 2.

c) La courbe de f admet nécessairement un extremum au point d'abscisse 2.

3) f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(2)=f(5)=1$ alors l'équation $f'(x)=0$ admet dans$]\,2,5\,[$

a) Au moins une solution b) Exactement une solution c) Aucune solution

Exercice 12



On donne ci-contre la courbe (C) représentative d'une fonction f

Les droites d'équations $=x+\ 1$, $x=2$ et $y=1$ sont des asymptotes à (C)

1) Déterminer graphiquement

* le domaine de définition de f

* le domaine de continuité de f

* le domaine de dérivabilité de f

2) a) Calculer graphiquement :

$f(-2)$, (0) , $f(1)$, et $f(3)$,

b) Calculer graphiquement :

$f'(-2)$, $f'(0)$ $f'(1)$ et $f'(3)$

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Déterminer graphiquement les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^-} f\ o\ f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^+} f\ o\ f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1} \frac{[f(x)]^5+32}{x-1}$

Exercice 13

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = 2x + \sqrt{1+4x^2} & si \quad x \le 0 \\ f(x) = 1 + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) & si \quad 0 < x < 1 \\ f(x) = \frac{5}{3} + \frac{2x}{3\sqrt{x^2+3}} & si \quad x \ge 1 \end{cases}$

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que f est continue en 0.

c) Montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$.

2) a) Montrer que est continue en 1.

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1.

c) Justifier que f est dérivable sur $]0, 1[$ puis calculer $f'(x)$.

3) Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = f(x) + 2$

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[$ on a : $g'(x) \le \frac{1}{4}$

c) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans $]4, 5[$ une unique solution α.

d) Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[$ on a : $|g(x) - \alpha| \le \frac{1}{4}|x - \alpha|$.

Exercice 14

Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1) Etudier les variations de f sur $]1, +\infty[$ et calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle $]1, +\infty[$.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1, +\infty[$.

b) Montrer que $1 < \alpha < 2$.

3) Soit la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Montrer que $g(\alpha) = \alpha$.

4) a) Déterminer l'image de l'intervalle $[1, +\infty[$ par la fonction g.

b) Montrer que $\forall x[1, +\infty[$ on a : $|g'(x)| \le \frac{1}{2}$

c) En déduire que $\forall x[1, +\infty[$ on a : $|g(x) - \alpha| \le \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Exercice 15

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 1$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter le résultat graphiquement

b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = \frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

c) Dresser le tableau de variation de f

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$

a) Dresser le tableau de variation de g

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in]1\,,2[$

c) Montrer que α est une solution de l'équation $\alpha^4 - 2\alpha^3 + 2\alpha^2 - 2\alpha = 0$

3) Soit la fonction h définie sur $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x) = f(\tan x)$

a) Montrer que h est dérivable sur $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$

b) Montrer que pour tout $x \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ $h'(x) = -\sin x$

c) Dresser le tableau de variation de h.

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1[$ par $f(x) = 2x + \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

b) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $f'(x) = 2 + \frac{1}{2\left(\sqrt{1-x}\right)^2}$

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-\infty, 1[$ et que $-1 < \alpha < 0$.

c) Déduire le signe de $f(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, \alpha[$ et $]\alpha, 1[$.

3) Soit la fonction $g : x \mapsto x^2 - 2\sqrt{1-x}$

a) Vérifier que pour pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $g'(x) = f(x)$.

b) En déduire les variations de g sur $]-\infty, 1[$.

4) Soit h la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x) = f(\sin x)$.

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} h(x)$.

b) Déterminer $h'(x)$. En déduire les variations de h sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$.