Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

1) a) Montrer que f est continue sur $[-1, 1]$.

b) Montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[$.

2) a) La fonction f est-elle dérivable à gauche en 1 ? est-elle dérivable à droite en -1 ?

Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3) a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-1, 1[$. b) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f

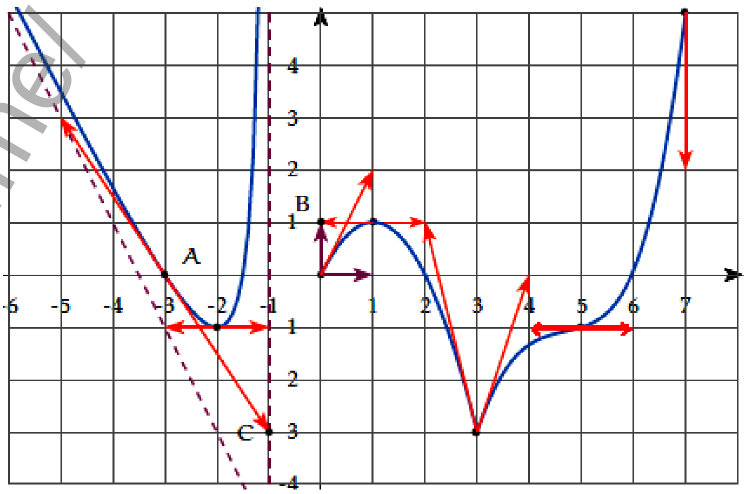
Exercice 2

On a tracé ci-contre, C_f la courbe représentative

d'une fonction f définie sur $]-\infty, -1[\cup [0, 7]$

La droite $\Delta: y = -2x - 7$

est une asymptote à C_f au voisinage $(-\infty)$.



1) a) Déterminer par lecture graphique

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{f(x)}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + 2x$

$f'(-3)$; $f'(-2)$; $f'(1)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{f(x)+3}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{f(x)+3}{x-3}$ et $\lim\limits_{x\to 7^-} \frac{f(x)-5}{x-7}$

b) La fonction f est-elle dérivable en 3 ?

c) Déterminer le point d'inflexion de C_f et déduire $f''(5)$

2) Ecrire une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse (-3).

3) Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels f est dérivable.

4) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2+1} & \text{si } x \le 0 \\ f(x) = x^3 - 3x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et soit (C) sa courbe représentative

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) a) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Justifier que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$

3) a) Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

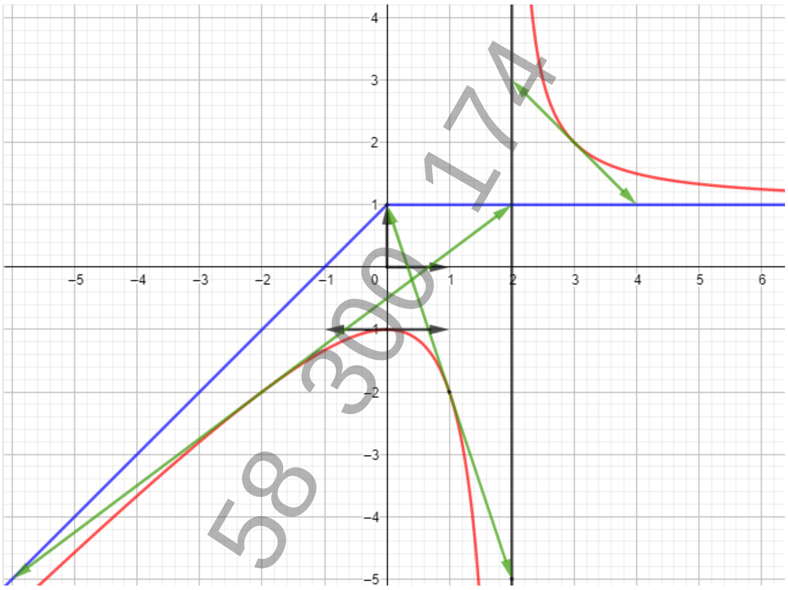
b) Montrer que $\forall x \in]-\infty, 0[$ on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ et déduire le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty, 0[$

c) dresser le tableau de variation de f.

Exercice 4

On donne ci-contre la courbe (C) représentative d'une fonction f

Les droites d'équations $= x + 1$, $x = 2$ et $y = 1$ sont des asymptotes à (C)



1) Déterminer graphiquement
   * le domaine de définition de f
   * le domaine de continuité de f
   * le domaine de dérivabilité de f
2) a) Calculer graphiquement : $f(-2)$, (0) , $f(1)$, et $f(3)$,
   b) Calculer graphiquement : $f'(-2)$, $f'(0)$ $f'(1)$ et $f'(3)$
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Déterminer graphiquement les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^-} (f\ o\ f)(x)$, $\lim\limits_{x\to2^+} (f\ o\ f)(x)$ et $\lim\limits_{x\to1} \frac{[f(x)]^5+32}{x-1}$

Exercice 5

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + x - 1$

1) Etudier les variations de f et donner son tableau de variation.
2) Montrer que l'équation $(x) = 0$, admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 2$
3) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(0) = 0$ et $g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$
   a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $-x^2 \leq g(x) \leq x^2$
   b) Montrer que g est continue en 0
   c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice 6

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 3x} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \sin(x^2) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) Etudier la continuité de f en 0.
2) Montrer que f est continue sur $]-\infty , 0[$.
3) On pose $\forall x > 0$ $U(x) = x^2$ et $V(x) = \sin(x^2)$
   a) Ecrire V sous la forme d'une fonction composée.
   b) En déduire que f est continue sur $]0 , +\infty[$.
4) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + x$
5) Montrer que $\forall x > 0$ on a : $f(x) \geq \frac{3}{2}x^2 - 1$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
6) Etudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.
7) a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty , 0[$ et calculer $f'(x)$.
   b) Montrer que $\forall x > 0$ on a : $f'(x) = 3x + 2x\cos(x^2)$.

8) dresser le tableau de variation de f

Exercice 7

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x + 1 - \cos\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $x \leq f(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$

c) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

4) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = 2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a $f'(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$

b) En déduire le sens de variation de f sur $[1, +\infty[$

c) Montrer que pour tout $x \geq 1$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$

2) Soit h la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $h(x) = f(x) - x$

a) Montrer que h est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ puis dresser son tableau de variation.

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[1, +\infty[$une unique solution α.

c) Etudier le signe de $f(x) - x$ sur $[1, +\infty[$

4) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $1 \leq U_n \leq \alpha$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante puis déduire qu'elle est convergente.

5) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}|U_n - \alpha|$

b) Montrer par récurrence $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n$ puis déduire la limite de la suite (U_n).

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1]$ par $f(x) = -\sqrt{1-x}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 1[$.

c) Dresser le tableau de variation de f et tracer (C).

2) Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,,1]$ par $g(x) = f(x) - x$

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]-\infty\,,0]$ une unique solution α et que $-2 \leq \alpha \leq -1$

3) a) Montrer que $\forall x \in]-\infty\,,0]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

b) Montrer que $\forall x \in]-\infty\,,0]$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Exercice 10

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 2x + \frac{1-\cos(x^2)}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Montrer que f est continue en 0.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x$.

b) Montrer que $\forall x \in]-\infty\,,0[$ on a : $2 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 2 + \frac{2}{x^2}$

c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

3) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0.

c) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,,0[$ et $]0\,,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

4) Préciser le sens de variation de f sur $[0\,,+\infty[$.

5) Soit la fonction g définie sur $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x) = \frac{1}{\sin x}$

a) Etudier les variations de g et en déduire $g\left(\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right]\right)$.

b) Soit la fonction h définie sur $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $h(x) = f\left(\frac{1}{\sin x}\right)$

c) Montrer que h est dérivable sur $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ et que $\forall x \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ on a : $h'(x) = -\frac{\cos x}{(\sin x)^2} \times f'\left(\frac{1}{\sin x}\right)$

d) Préciser le sens de variation de h.

Exercice 11

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = 2x + \sqrt{1 + 4x^2} & si \;\; x \leq 0 \\ f(x) = 1 + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) & si \;\; 0 < x < 1 \\ f(x) = \frac{5}{3} + \frac{2x}{3\sqrt{x^2+3}} & si \;\; x \geq 1 \end{cases}$

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que f est continue en 0.

c) Montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty\,,0]$.

2) a) Montrer que est continue en 1.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.

c) Justifier que f est dérivable sur $]0\,,1[$ puis calculer $f'(x)$.

3) Soit g la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x)=f(x)+2$

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Montrer que $\forall x\in[1,+\infty[$ on a : $g'(x)\leq\frac{1}{4}$

c) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet dans $]4,5[$ une unique solution α.

d) Montrer que $\forall x\in[1,+\infty[$ on a : $|g(x)-\alpha|\leq\frac{1}{4}|x-\alpha|$.

Exercice 12

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\frac{x+1-\cos(\pi x)}{x} & si\ x<0 \\ f(x)=x^3-12x+1 & si\ x\geq 0\end{cases}$

1) a) Vérifier que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$

b) Montrer que f est continue en 0

c) Montrer que $\forall x\in]-\infty,0[$ on a : $\frac{x+2}{x}\leq f(x)\leq 1$

d) Déterminer alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ au moins une solution α

b) Montrer que $\sin(\pi\alpha)=-\sqrt{-\alpha^2-2\alpha}$

3) a) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,+\infty[$

b) Déterminer $f([0,2])$ et $f([2,+\infty[)$

4) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $[0,+\infty[$ exactement deux solutions β et λ et tel que $\beta\in]0,2[$ et $\lambda\in]2,4[$ b) Déterminer alors le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$

Exercice 13

Soit la fonction f définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{2}}$

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en -1.

b) Montrer que $\forall x\in]-1,+\infty[$ on a : $f'(x)=\frac{1}{4f(x)}$ et en déduire le sens de variation de f.

c) Montrer que $\forall x[0,1]$ on a : $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$

2) Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$; $U_{n+1}=f(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$; $0\leq U_n\leq 1$.

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1}-1|\leq\frac{1}{2}|U_n-1|$.

c) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $|U_n-1|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et en déduire la limite de suite U.

Exercice 14

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}(1+x^2)}$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$.

b) Montrer que pour tout $x\in[0,1]$ on a : $f'(x)\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$

2) Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 1$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|U_n - 1|$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ d) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 15

Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1) Etudier les variations de f sur $]1, +\infty[$ et calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle $]1, +\infty[$.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1, +\infty[$.

b) Montrer que $1 < \alpha < 2$.

3) Soit la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Montrer que $g(\alpha) = \alpha$.

4) a) Déterminer l'image de l'intervalle $[1, +\infty[$ par la fonction g.

b) Montrer que $\forall x[1, +\infty[$ on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c) En déduire que $\forall x[1, +\infty[$ on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

5) Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = g(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $1 \leq U_n \leq 2$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et en déduire la limite de suite U.

Exercice 16

1) Soit la fonction définie sur IR par $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 8}$ et soit (C) sa courbe représentative.

Dresser le tableau de variation de f.

2) Etudier les branches infinies de f et tracer la courbe(C)

3) a) Montrer que $\forall x \in [1, 2]$, on a : $1 \leq f(x) \leq 2$ et en déduire que $\forall x \in [1, 2]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

4) Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $1 \leq U_n \leq 2$.

b) Tracer la droite d'équation $y = x$ puis représenter les quatre premiers termes sur l'axe des abscisses. c) Quelle conjecture peut-on proposer ?

5) On pose $\alpha = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ vérifier que $f(\alpha) = \alpha$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - 3|$.

b) Calculer alors la limite de suite U.