

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

**Exercice 1**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-1, 1]$  par  $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

- 1) a) Montrer que  $f$  est continue sur  $[-1, 1]$ .  
 b) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $] -1, 1[$ .
- 2) a) La fonction  $f$  est-elle dérivable à gauche en  $1$  ? est-elle dérivable à droite en  $-1$  ?  
 Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 3) a) Calculer  $f'(x)$  pour  $x \in ] -1, 1[$ .  
 b) Etudier le signe de  $f'(x)$  et dresser le tableau de variation de  $f$

**Exercice 2**

On a tracé ci-contre,  $C_f$  la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $]-\infty, -1[ \cup [0, 7]$ . La droite  $\Delta: y = -2x - 7$  est une asymptote à  $C_f$  au voisinage  $(-\infty)$ .

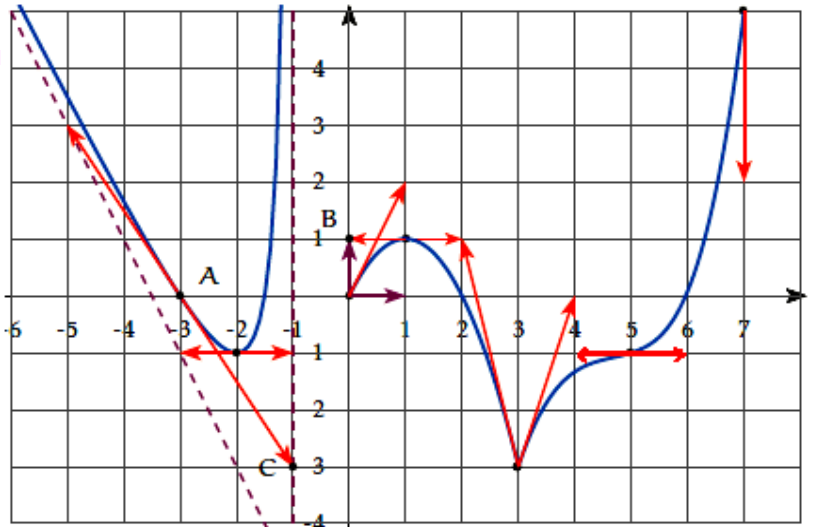
1) a) Déterminer par lecture graphique

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{f(x)} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2x$$

$$f'(-3); f'(-2); f'(1); \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}; \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x)+3}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)+3}{x-3} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{f(x)-5}{x-7}$$

- b) La fonction  $f$  est-elle dérivable en  $3$  ?
- c) Déterminer le point d'inflexion de  $C_f$  et déduire  $f''(5)$
- 2) Ecrire une équation de la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse  $(-3)$ .
- 3) Déterminer les intervalles de  $\mathbb{R}$  sur lesquels  $f$  est dérivable.
- 4) Dresser le tableau de variation de  $f$ .



**Exercice 3**

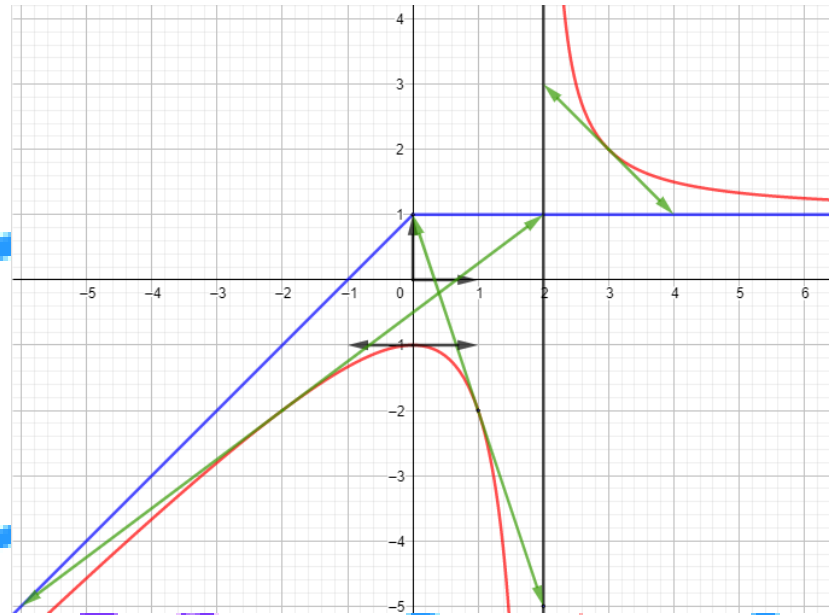
Soit  $f$  la fonction définie par :  $\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x^3 + 3x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$  et soit  $(C)$  sa courbe représentative

- 1) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) a) Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $0$  et interpréter graphiquement le résultat obtenu.  
 b) Justifier que  $f$  est dérivable sur chacun des intervalles  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$  et calculer  $f'(x)$
- 3) a) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$   
 b) Montrer que  $\forall x \in ]-\infty, 0[$  on a :  $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$  et déduire le signe de  $f'(x)$  sur  $]-\infty, 0[$   
 c) dresser le tableau de variation de  $f$ .

### Exercice 4

On donne ci-contre la courbe (C) représentative d'une fonction  $f$

Les droites d'équations  $y = x + 1$ ,  $x = 2$  et  $y = 1$  sont des asymptotes à (C)



1) Déterminer graphiquement

- \* le domaine de définition de  $f$
- \* le domaine de continuité de  $f$
- \* le domaine de dérivabilité de  $f$

2) a) Calculer graphiquement :

$$f(-2), f(0), f(1), \text{ et } f(3),$$

b) Calculer graphiquement :

$$f'(-2), f'(0), f'(1) \text{ et } f'(3)$$

3) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

4) Déterminer graphiquement les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} (f \circ f)(x), \lim_{x \rightarrow 2^+} (f \circ f)(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[f(x)]^5 + 32}{x-1}$$

### Exercice 5

On considère la fonction  $f: x \mapsto x^3 - 2x^2 + x - 1$

1) Etudier les variations de  $f$  et donner son tableau de variation.

2) Montrer que l'équation  $(x) = 0$ , admet dans  $\mathbb{R}$  une unique solution  $\alpha$  et que  $1 < \alpha < 2$

3) Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(0) = 0$  et  $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$  si  $x \neq 0$

a) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a :  $-x^2 \leq g(x) \leq x^2$

b) Montrer que  $g$  est continue en 0

c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

### Exercice 6

Soit  $f$  la fonction définie par 
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 3x} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \sin(x^2) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
 et soit (C) sa courbe représentative.

1) Etudier la continuité de  $f$  en 0.

2) Montrer que  $f$  est continue sur  $]-\infty, 0[$ .

3) On pose  $\forall x > 0$   $U(x) = x^2$  et  $V(x) = \sin(x^2)$

a) Ecrire  $V$  sous la forme d'une fonction composée.

b) En déduire que  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

4) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x$

5) Montrer que  $\forall x > 0$  on a :  $f(x) \geq \frac{3}{2}x^2 - 1$  et en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- 6) Etudier la dérivabilité de  $f$  à gauche et à droite en  $0$  et interpréter le résultat graphiquement.
- 7) a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]-\infty, 0[$  et calculer  $f'(x)$ .
- b) Montrer que  $\forall x > 0$  on a :  $f'(x) = 3x + 2x \cos(x^2)$ .
- 8) dresser le tableau de variation de  $f$

### Exercice 7

Soit  $f$  la fonction définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x + 1 - \cos \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
 et soit  $(C)$  sa courbe représentative.

- 1) a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- b) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$  on a :  $x \leq f(x)$  et en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 2) Justifier que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- 3) a) Etudier la dérivabilité de  $f$  à gauche en  $0$  et interpréter le résultat graphiquement.
- b) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$  on a :  $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x}$
- c) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $0$ .
- 4) Montrer que  $f$  est dérivable sur chacun des intervalles  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$  et calculer  $f'(x)$ .

### Exercice 8

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]-\infty, 1]$  par  $f(x) = -\sqrt{1-x}$  et soit  $(C)$  sa courbe représentative.

- 1) a) Etudier la dérivabilité de  $f$  à gauche en  $1$  et interpréter le résultat graphiquement.
- b) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]-\infty, 1[$ .
- c) Dresser le tableau de variation de  $f$  et tracer  $(C)$ .
- 2) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]-\infty, 1]$  par  $g(x) = f(x) - x$
- a) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- b) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $]-\infty, 0]$  une unique solution  $\alpha$  et que  $-2 \leq \alpha \leq -1$
- 3) a) Montrer que  $\forall x \in ]-\infty, 0]$  on a :  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
- b) Montrer que  $\forall x \in ]-\infty, 0]$  on a :  $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

### Exercice 9

Soit  $f$  la fonction définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = 2x + \frac{1 - \cos(x^2)}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
 et soit  $(C)$  sa courbe représentative.

- 1) a) Montrer que  $f$  est continue en  $0$ .
- b) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$ .
- b) Montrer que  $\forall x \in ]-\infty, 0[$  on a :  $2 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 2 + \frac{2}{x^2}$
- c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$
- 3) a) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $0$  et interpréter le résultat graphiquement.

- b) Etudier la dérivabilité de  $f$  à gauche en 0.
- c) Montrer que  $f$  est dérivable sur chacun des intervalles  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$  et calculer  $f'(x)$ .
- 4) Préciser le sens de variation de  $f$  sur  $[0, +\infty[$ .
- 5) Soit la fonction  $g$  définie sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  par :  $g(x) = \frac{1}{\sin x}$
- a) Etudier les variations de  $g$  et en déduire  $g\left(]0, \frac{\pi}{2}[ \right)$ .
- b) Soit la fonction  $h$  définie sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  par :  $h(x) = f\left(\frac{1}{\sin x}\right)$
- c) Montrer que  $h$  est dérivable sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  et que  $\forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  on a :  $h'(x) = -\frac{\cos x}{(\sin x)^2} \times f'\left(\frac{1}{\sin x}\right)$
- d) Préciser le sens de variation de  $h$ .

### Exercice 10

Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \sqrt{1 + 4x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{5}{3} + \frac{2x}{3\sqrt{x^2+3}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- 1) a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- b) Montrer que  $f$  est continue en 0.
- c) Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $]-\infty, 0[$ .
- 2) a) Montrer que  $f$  est continue en 1.
- b) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 1.
- c) Justifier que  $f$  est dérivable sur  $]0, 1[$  puis calculer  $f'(x)$ .
- 3) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[1, +\infty[$  par  $g(x) = f(x) + 2$
- a) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- b) Montrer que  $\forall x \in [1, +\infty[$  on a :  $g'(x) \leq \frac{1}{4}$
- c) Montrer que l'équation  $g(x) = x$  admet dans  $]4, 5[$  une unique solution  $\alpha$ .
- d) Montrer que  $\forall x \in [1, +\infty[$  on a :  $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$ .

### Exercice 11

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1-\cos(\pi x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^3 - 12x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- 1) a) Vérifier que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$
- b) Montrer que  $f$  est continue en 0
- c) Montrer que  $\forall x \in ]-\infty, 0[$  on a :  $\frac{x+2}{x} \leq f(x) \leq 1$
- d) Déterminer alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 2) a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$  au moins une solution  $\alpha$
- b) Montrer que  $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{-\alpha^2 - 2\alpha}$

- 3) a) Dresser le tableau des variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0, +\infty[$   
 b) Déterminer  $f([0, 2])$  et  $f([2, +\infty[)$
- 4) a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $[0, +\infty[$  exactement deux solutions  $\beta$  et  $\lambda$  et tel que  $\beta \in ]0, 2[$  et  $\lambda \in ]2, 4[$   
 b) Déterminer alors le signe de  $f(x)$  sur l'intervalle  $[0, +\infty[$

### Exercice 12

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[-1, +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$

- 1) a) Etudier la dérivabilité de  $f$  à gauche en  $-1$ .  
 b) Montrer que  $\forall x \in ]-1, +\infty[$  on a :  $f'(x) = \frac{1}{4f(x)}$  et en déduire le sens de variation de  $f$ .  
 c) Montrer que  $\forall x \in [0, 1]$  on a :  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
- 2) Soit la suite  $U$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N} ; U_{n+1} = f(U_n)$ .  
 a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq U_n \leq 1$ .  
 b) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a :  $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2} |U_n - 1|$ .  
 c) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a :  $|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$  et en déduire la limite de suite  $U$ .

### Exercice 13

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(1+x^2)}$

- 1) a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et déterminer  $f'(x)$ .  
 b) Montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$  on a :  $f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$
- 2) Soit la suite réelle  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_0 = 0$  et  $U_{n+1} = f(U_n)$ .  
 a) Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $0 \leq U_n \leq 1$ .  
 b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |U_n - 1|$   
 c) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$  d) Déterminer alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

### Exercice 14

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]1, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

- 1) Etudier les variations de  $f$  sur  $]1, +\infty[$  et calculer les limites de  $f$  aux bornes de l'intervalle  $]1, +\infty[$ .
- 2) a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]1, +\infty[$ .  
 b) Montrer que  $1 < \alpha < 2$ .
- 3) Soit la fonction  $g$  définie sur  $[1, +\infty[$  par  $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ . Montrer que  $g(\alpha) = \alpha$ .
- 4) a) Déterminer l'image de l'intervalle  $[1, +\infty[$  par la fonction  $g$ .  
 b) Montrer que  $\forall x \in [1, +\infty[$  on a :  $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$   
 c) En déduire que  $\forall x \in [1, +\infty[$  on a :  $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$

5) Soit la suite  $U$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_0 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} = g(U_n)$ .

a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}; 1 \leq U_n \leq 2$ .

b) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a :  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$ .

c) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a :  $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$  et en déduire la limite de suite  $U$ .

### **Exercice 15**

1) Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 8}$  et soit  $(C)$  sa courbe représentative. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

2) Etudier les branches infinies de  $f$  et tracer la courbe  $(C)$

3) a) Montrer que  $\forall x \in [1, 2]$ , on a :  $1 \leq f(x) \leq 2$  et en déduire que  $\forall x \in [1, 2]$ , on a :  $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

4) Soit la suite  $U$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} = f(U_n)$ .

a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}; 1 \leq U_n \leq 2$ .

b) Tracer la droite d'équation  $y = x$  puis représenter les quatre premiers termes sur l'axe des abscisses.

c) Quelle conjecture peut-on proposer ?

5) On pose  $\alpha = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$  vérifier que  $f(\alpha) = \alpha$ .

a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$ .

b) Calculer alors la limite de suite  $U$ .