

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(x) = x - (\sin x)^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 b) Montrer que pour tout $x \leq 0$ on a : $f(x) \leq x$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 2) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
- 3) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-\infty, 0[$ puis pour $x \in]0, +\infty[$
- 5) a) Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty, 0[$
 b) Déterminer l'image de l'intervalle $]-\infty, 0[$ par la fonction f
- 6) a) Montrer que l'équation $f(x) = -\frac{\pi}{2}$ admet une unique solution α dans $[-\pi, 0]$
 b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\left[\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) Etudier les branches infinies de C_f .
- 2) Déterminer l'image de l'intervalle $]1, +\infty[$ par f .
- 3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]1, +\infty[$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 2$
- 4) Soit g la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ par
$$\begin{cases} g(x) = f(\tan x) & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Montrer que g est continue sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 3

On considère la fonction , $x \mapsto x^3 - 2x^2 + x - 1$

- 1) étudier les variations de f et donner son tableau de variation.
- 2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$, admet dans \mathbb{R} une unique solution α et que $1 < \alpha < 2$
- 3) Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$
 - a) Montrer que : $x \in \mathbb{R}^*$ on a : $-x^2 \leq g(x) \leq x^2$
 - b) Montrer que g est continue en 0
 - c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

Exercice 4

- 1) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 3x + 2 \sin x$ et soit C_f sa courbe représentative
 - a) Montrer que pour tout x de \mathbb{R} on a : $3x - 2 \leq f(x) \leq 3x + 2$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} g(x) = \frac{x}{f(x)} & \text{si } x > 0 \\ x^3 - 3x + \frac{1}{5} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$
 et soit C_g sa courbe représentative

a) Montrer que g est continue en 0

b) Montrer que pour tout $x > \frac{2}{3}$ on a : $\frac{x}{3x+2} \leq g(x) \leq \frac{x}{3x-2}$

c) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et interpréter le résultat graphiquement

2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ dans admet $]-\infty, 0]$ une unique solution α et que $\alpha \in]-2; -1[$

b) Déterminer alors le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]-\infty, 0]$

Exercice 5

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose $f_n(x) = x^3 - 2nx + 1$

1) Montrer que la fonction f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$

2) Prouver que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n dans $[0, 1]$

3) a) Vérifier que, pour tout entier ≥ 2 , $f_{n+1}(a_n) = -2a_n$

b) Montrer alors que la suite (a_n) ainsi définie est décroissante.

c) En déduire que la suite (a_n) est convergente.

4) a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $a_n \leq \frac{1}{n}$

b) En déduire la limite de la suite (a_n)

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+1-\cos(\pi x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x^3 - 12x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) a) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$

b) Montrer que f est continue en 0

c) Montrer que $\forall x \in]-\infty, 0[$ on a : $\frac{x+2}{x} \leq f(x) \leq 1$

d) Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[-\frac{1}{2}, 0]$ au moins une solution α

b) Montrer que $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{1-\alpha^2} - 2\alpha$

3) a) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$

b) Déterminer $f([0, 2])$ et $f([2, +\infty[)$

4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0, +\infty[$ exactement deux solutions β et λ et tel que $\beta \in]0, 2[$ et $\lambda \in]2, 4[$

b) Déterminer alors le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$

Exercice 7

1) En utilisant l'une des inégalités des accroissements finies montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $|\sin x| \leq |x|$

2) a) En déduire le sens de variation sur l'intervalle $[0, \pi]$ de la fonction $h : x \mapsto 1 - \cos x - \frac{x^2}{2}$

b) En déduire que $\forall x \in [0, \pi]$ on a : $1 - \cos x - \frac{x^2}{2} \leq 0$

3) a) Montrer que $\forall x \in [0, \pi]$ on a : $x - \sin x \leq \frac{1}{6}x^3$

b) En déduire que $\forall x \in [-\pi, 0]$ on a : $\frac{1}{6}x^3 \leq x - \sin x$

4) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x - \sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue en 0

b) Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

Exercice 8

1) Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 8}$ et soit (C) sa courbe représentative.

Dresser le tableau de variation de f .

2) Etudier les branches infinies de f et tracer la courbe (C)

3) a) Montrer que $\forall x \in [1, 2]$, on a : $1 \leq f(x) \leq 2$ et en déduire que $\forall x \in [1, 2]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

4) Soit la suite U définie sur \mathbb{N} par $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; 1 \leq U_n \leq 2$

b) Tracer la droite d'équation $y = x$ puis représenter les quatre premiers termes sur l'axe des abscisses

c) Quelle conjecture peut-on proposer

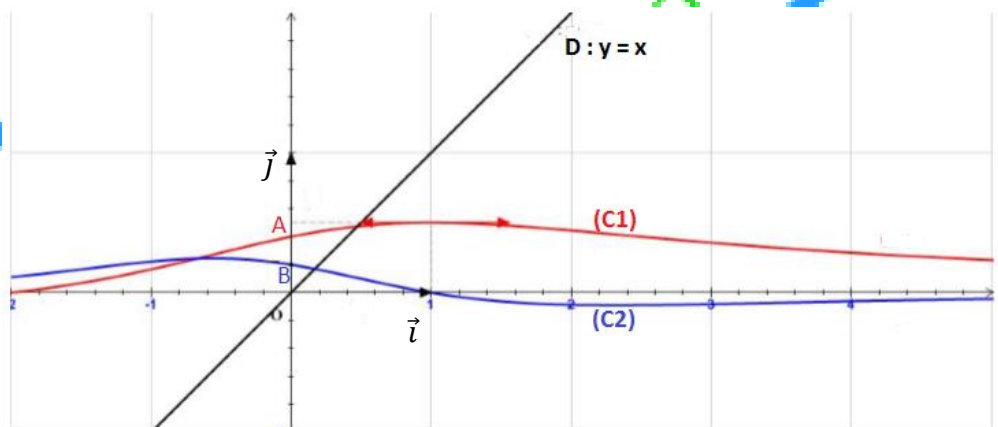
5) On pose $\alpha = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ vérifier que $f(\alpha) = \alpha$

a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$

b) Calculer alors la limite de suite U

Exercice 9

On a représenté ci-dessous deux courbes (C_1) et (C_2) d'une fonction f et de sa fonction dérivée f' toute les deux définies sont continues sur $[-2, +\infty[$ la droite $D : y = x$ et $A(0, \frac{2}{5}) \in (C_1)$ et $B(0, \frac{1}{5}) \in (C_2)$



1) Reconnaître la courbe représentative de f et celle de f' (justifier)

2) Déterminer chacune des limites suivantes $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)-1}{2x-2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2-5f(x)}$

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[0, 1]$ une unique solution α

b) Montrer que pour tous réels a et b de $[0, 1]$ on a : $|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{5}|b - a|$

4) Soit la suite U définie sur \mathbb{N} par $U_0 \in [0, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 1$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{5}|U_n - \alpha|$

c) En déduire alors que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

d) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1]$ par $f(x) = -\sqrt{1-x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 1[$

c) Dresser le tableau de variation de f et tracer C_f

2) Soit g la fonction définie sur $]-\infty, 1]$ par $g(x) = f(x) - x$

a) Dresser le tableau de variation de g

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]-\infty, 0]$ une unique solution α

3) a) Montrer que $\forall x \in]-\infty, 0]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

b) Montrer que $\forall x \in]-\infty, 0]$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Exercice 11

On a représenté ci-contre la courbe C d'une fonction f définie et continue sur \mathbb{R}

La droite $D : y = 1$ est une asymptote à C au voisinage de $-\infty$

La droite $\Delta : y = -x + 1$ est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$

1) En utilisant le graphique répondre aux questions les suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + 2x ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{f(x)-1} ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} f\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[f\left(\frac{1}{x}\right) - 2 \right] ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ f(x) ; f \circ f(]-2, +\infty[)$$

2) Soit g une fonction deux fois dérivable sur $[-2, +\infty[$

tel que $g(0) = \frac{1}{2}$ et dont la fonction dérivée a pour

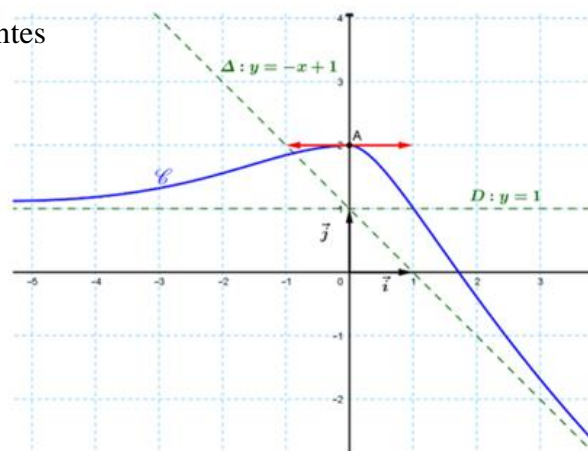
représentation graphique celle de f à l'intervalle $[-2, +\infty[$

a) Montrer que $\forall x \in [0, 2]$ on a : $\left|g(x) - \frac{1}{2}\right| \leq 2|x|$

b) Montrer que la courbe de g admet un point d'inflexion dont on donnera les coordonnées

3) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $h(x) = \frac{2x^2}{1+x^2}$

a) Dresser le tableau de variation de h



b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ montrer que l'équation $h(x) = \frac{n}{n+1}$ admet une unique solution U_n dans $]0, +\infty[$

c) Vérifier que $U_n \in]0, 1[$

d) Montrer que $U_n = \sqrt{\frac{n}{n+2}}$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

4) a) Montrer que la fonction $f \circ h \circ h$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

b) Dresser le tableau de variation de $f \circ h \circ h$ sur $]0, +\infty[$

Exercice 12

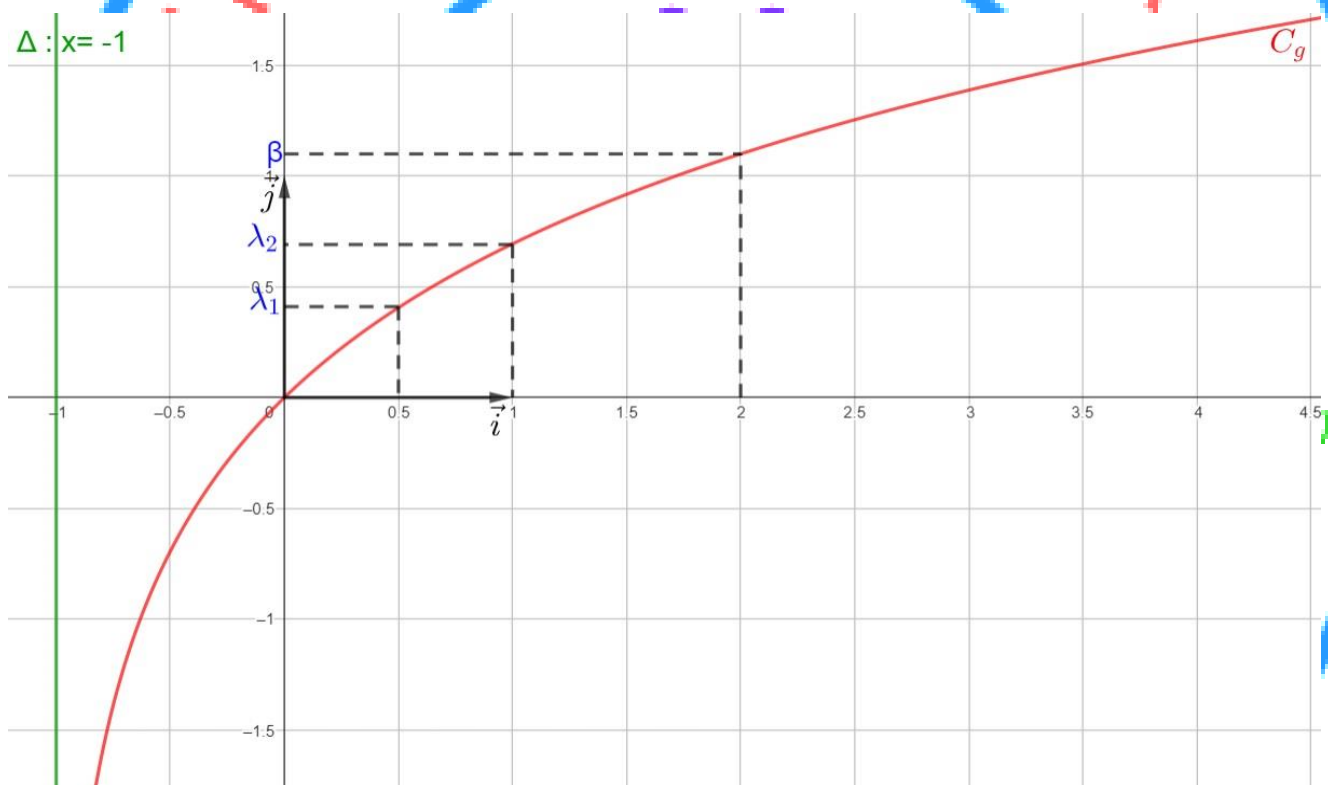
On donne ci-dessous la courbe C_g d'une fonction g dérivable sur $]-1, +\infty[$.

* La droite $\Delta: x = -1$ est une asymptote à C_g .

* La courbe C_g admet une branche parabolique de direction celle de (O, \vec{i}) au voisinage de $+\infty$.

* La droite $\Delta': y = x$ est tangente à C_g au point d'abscisse 0.

* On pose $g\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda_1$ et $g(1) = \lambda_2$ avec $\frac{1}{4} < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$



1) A partir du graphique déterminer $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ et $g'(0)$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = g(\sqrt{x})$ et soit C_f sa courbe représentative.

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ interpréter graphiquement le résultat.

c) Sachant que $\forall x \in]-1, +\infty[$; $g'(x) = \frac{1}{x+1}$, montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x \in]0, +\infty[; f'(x) = \frac{1}{2(x+\sqrt{x})}$$

d) Dresser le tableau de variation de f .

- 3) a) Montrer que $\forall x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$ on a $f'(x) \leq \frac{2}{3}$
- b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ une unique solution α
- c) Placer les points de C_f d'abscisses $\frac{1}{4}$; α ; 1 et 4. Tracer C_f (on prendra $\approx 0,55$)
- 4) Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$
- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; \frac{1}{4} \leq U_n \leq 1$
- b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |U_n - \alpha|$
- c) En déduire par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}; |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - \alpha|$
- d) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

Exercice 13

Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

- 1) a) Etudier les variations de f sur $]1, +\infty[$
- b) En déduire l'image de l'intervalle $]1, +\infty[$ par f .
- 2) Soit g la fonction définie par :
- $$\begin{cases} g(x) = f\left(\frac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Montrer que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a : $g(x) = \frac{1}{\sin x}$ et en déduire que g est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$

- 3) Calculer $g'(x)$ de deux manières pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
- 4) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ une unique solution α et que $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Exercice 14

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x + \sqrt{1 + 4x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = 1 + x^2 \sin \frac{\pi}{2x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ f(x) = \frac{5}{3} + \frac{2x}{3\sqrt{x^2+3}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- 1) a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- b) Montrer que f est continue en 0.
- c) Montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$.
- 2) a) Montrer que f est continue en 1.
- b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1.
- c) Justifier que f est dérivable sur $]0, 1[$ puis calculer $f'(x)$.
- 3) Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $g(x) = f(x) + 2$.
- a) Dresser le tableau de variation de g .
- b) Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[$ on a : $g'(x) \leq \frac{1}{4}$
- c) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans $]4, 5[$ une unique solution α .

d) Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[$ on a $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$

Exercice 15

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = 2x + \frac{1 - \cos(x^2)}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
 et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Montrer que f est continue en 0.

b) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$.

b) Montrer que $\forall x \in]-\infty, 0[$ on a : $2 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 2 + \frac{2}{x^2}$

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

3) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0.

c) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.

4) Préciser le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$.

5) Soit la fonction g définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = \frac{1}{\sin x}$

a) Etudier les variations de g et en déduire $g\left(]0, \frac{\pi}{2}[\right)$.

b) Soit la fonction h définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par : $h(x) = f\left(\frac{1}{\sin x}\right)$

c) Montrer que h est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et que $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a : $h'(x) = -\frac{\cos x}{(\sin x)^2} \times f'\left(\frac{1}{\sin x}\right)$

d) Préciser le sens de variation de h .

Exercice 16

Soit la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en -1 .

b) Montrer que $\forall x \in]-1, +\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{1}{4f(x)}$ et en déduire le sens de variation de f .

c) Montrer que $\forall x \in [0, 1]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

2) Soit la suite U définie sur \mathbb{N} par $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; 0 \leq U_n \leq 1$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|U_n - 1|$.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et en déduire la limite de suite U .

Exercice 17

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}} + 2$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $f'(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f .

- c) Etudier la position de (C) par rapport à sa tangente T au point $A(0, 2)$.
- d) Construire (C) et T .
- 2) a) Montrer que $\forall x \in [\sqrt{2}, +\infty[$ on a : $0 < f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$
- b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[\sqrt{2}, +\infty[$ une solution unique α .
- 3) Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} = f(U_n)$.
- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; U_n \geq 2$
- b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} |U_n - \alpha|$
- c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}; |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |2 - \alpha|$
- d) Calculer alors la limite de suite U

Exercice 18

- 1) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on définit la fonction $f_k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x^k}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- Démontrer que la fonction f_k est strictement croissante sur \mathbb{R}^+
- 2) Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \frac{(U_n)^2}{\sqrt{(U_n)^2 + 1}}$
- a) Montrer par récurrence que : la suite (U_n) est strictement décroissante.
- b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}; 0 < U_n < 1$
- 3) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.
- 4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_{n+1} < \frac{U_n}{\sqrt{2}}$
- b) Retrouver alors la limite de la suite (U_n)

Exercice 19

Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

- 1) Etudier les variations de f sur $]1, +\infty[$ et calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle $]1, +\infty[$
- 2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1, +\infty[$
- b) Montrer que $1 < \alpha < 2$
- 3) Soit la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Montrer que $g(\alpha) = \alpha$.
- 4) a) Déterminer l'image de l'intervalle $[1, +\infty[$ par la fonction g .
- b) Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[$ on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$
- c) En déduire que $\forall x \in [1, +\infty[$ on a : $|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$.
- 5) Soit la suite U définie sur \mathbb{N} par $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = g(U_n)$.
- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $1 \leq U_n \leq 2$.
- b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$.
- c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et en déduire la limite de suite U .