Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(x) = x - (\sin x)^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que pour tout $x \leq 0$ on a : $f(x) \leq x$ et en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-\infty, 0[$ puis pour $x \in]0, +\infty[$

5) a) Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty, 0[$

b) Déterminer l'image de l'intervalle $]-\infty, 0[$ par la fonction f

6) a) Montrer que l'équation $f(x) = -\frac{\pi}{2}$ admet une unique solution α dans $[-\pi, 0]$

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\left[\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Etudier les branches infinies de C_f.

2) Déterminer l'image de l'intervalle $]1, +\infty[$ par f.

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]1, +\infty[$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 2$

4) Soit g la fonction définie sur $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ par $\begin{cases} g(x) = f(\tan x) & si\ x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$

Montrer que g est continue sur $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 3

On considère la fonction , $x \mapsto x^3 - 2x^2 + x - 1$

1) étudier les variations de f et donner son tableau de variation.

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$, admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 2$

3) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = x^2\sin\frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que : $x \in \mathbb{R}^*$ on a : $-x^2 \leq g(x) \leq x^2$

b) Montrer que g est continue en 0

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Exercice 4

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x + 2\sin x$ et soit C_f sa courbe représentative

a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $3x - 2 \leq f(x) \leq 3x + 2$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = \frac{x}{f(x)} & si\ x > 0 \\ x^3 - 3x + \frac{1}{5} & si\ x \leq 0 \end{cases}$ et soit C_g sa courbe représentative

a) Montrer que g est continue en 0

b) Montrer que pour tout $x > \frac{2}{3}$ on a : $\frac{x}{3x+2} \leq g(x) \leq \frac{x}{3x-2}$

c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et interpréter le résultat graphiquement

3) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ dans admet $]-\infty\,,0]$ une unique solution α et que $\alpha \in\ ]-2\,;\ -1[$

b) Déterminer alors le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]-\infty\,,0]$

Exercice 5

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose $f_n(x) = x^3 - 2nx + 1$

1) Montrer que la fonction f_n est strictement décroissante sur $[0\,,1]$

2) Prouver que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n dans $[0\,,1]$

3) a) Vérifier que, pour tout entier ≥ 2 , $f_{n+1}(a_n) = -2a_n$

b) Montrer alors que la suite (a_n) ainsi définie est décroissante.

c) En déduire que la suite (a_n) est convergente.

4) a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $a_n \leq \frac{1}{n}$

b) En déduire la limite de la suite (a_n)

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x+1-\cos(\pi x)}{x} & si\ x < 0 \\ f(x) = x^3 - 12x + 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$

1) a) Vérifier que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$

b) Montrer que f est continue en 0

c) Montrer que $\forall x \in\ ]-\infty\,,0[$ on a : $\frac{x+2}{x} \leq f(x) \leq 1$

d) Déterminer alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\left[-\frac{1}{2}\,,0\right]$ au moins une solution α

b) Montrer que $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{-\alpha^2 - 2\alpha}$

3) a) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,,+\infty[$

b) Déterminer $f([0\,,2])$ et $f([2\,,+\infty[)$

4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0\,,+\infty[$ exactement deux solutions β et λ et tel que $\beta \in\ ]0\,,2[$ et $\lambda \in\ ]2\,,4[$

b) Déterminer alors le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0\,,+\infty[$

Exercice 7

1) En utilisant l'une des inégalités des accroissements finies montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $|\sin x| \leq |x|$

2) a) En déduire le sens de variation sur l'intervalle $[0\,,\pi]$ de la fonction $h : x \mapsto 1 - \cos x - \frac{x^2}{2}$

b) En déduire que $\forall x \in [0\,,\pi]$ on a : $1 - \cos x - \frac{x^2}{2} \leq 0$

3) a) Montrer que $\forall x \in [0\,,\pi]$ on a : $x - \sin x \leq \frac{1}{6}x^3$

b) En déduire que $\forall x \in [-\pi\,,0]$ on a : $\frac{1}{6}x^3 \leq x - \sin x$

4) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x - \sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que f est continue en 0

b) Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

Exercice 8

1) Soit la fonction définie sur IR par $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 8}$ et soit (C) sa courbe représentative. .

Dresser le tableau de variation de f.

2) Etudier les branches infinies de f et tracer la courbe(C)

3) a) Montrer que $\forall x \in [1\,,2]$, on a : $1 \leq f(x) \leq 2$ et en déduire que $\forall x \in [1\,,2]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

4) Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $1 \leq U_n \leq 2$

b) Tracer la droite d'équation $y = x$ puis représenter les quatre premiers termes sur l'axe des abscisses

c) Quelle conjecture peut-on proposer

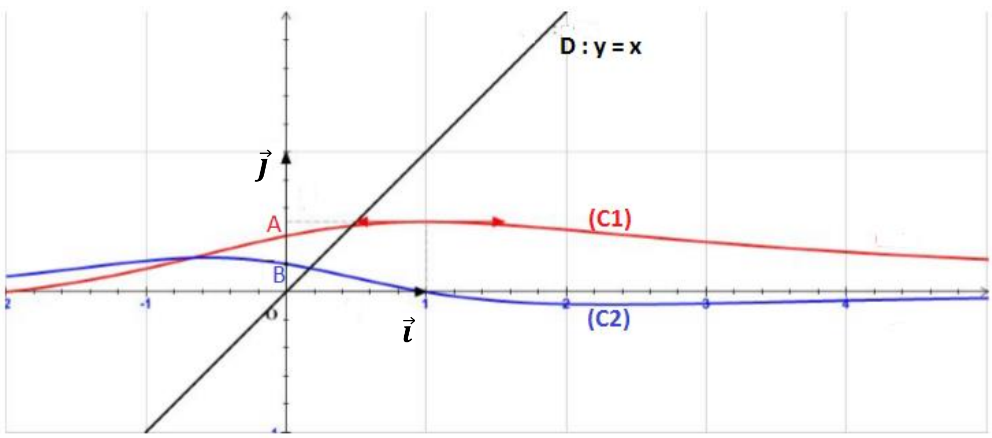
5) On pose $\alpha = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ vérifier que $f(\alpha) = \alpha$

a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - 3|$

b) Calculer alors la limite de suite U

Exercice 9

On a représenté ci-dessous deux courbes (C_1) et (C_2) d'une fonction f et de sa fonction dérivé f' toute les deux définies sont continues sur $[-2\,,+\infty[$ la droite $D : y = x$ et $A\left(0\,,\frac{2}{5}\right) \in (C_1)$ et $B\left(0\,,\frac{1}{5}\right) \in (C_2)$



1) Reconnaitre la courbe représentative de f et celle de f' (justifier)

2) Déterminer chacune des limites suivantes $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2f(x)-1}{2x-2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{2-5f(x)}$

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[0\,,1]$ une unique solution α

b) Montrer que pour tous réels a et b de $[0\,,1]$ on a : $|f(b)-f(a)| \leq \frac{1}{5}|b-a|$

4) Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 \in [0\,,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 1$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{5}|U_n-\alpha|$

c) En déduire alors que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

d) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,,1]$ par $f(x) = -\sqrt{1-x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty\,,1[$

c) Dresser le tableau de variation de f et tracer C_f

2) Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,,1]$ par $g(x) = f(x) - x$

a) Dresser le tableau de variation de g

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]-\infty\,,0]$ une unique solution α

3) a) Montrer que $\forall x \in]-\infty\,,0]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

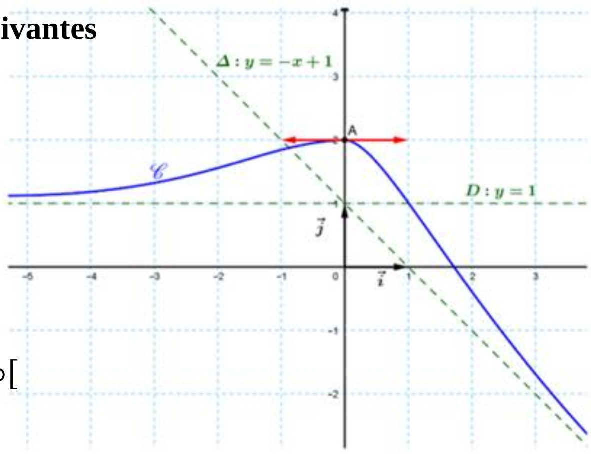
b) Montrer que $\forall x \in]-\infty\,,0]$ on a : $|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

Exercice 11

On a représenté ci-contre la courbe C d'une fonction f définie et continue sur IR

La droite D : $y = 1$ est une asymptote à C au voisinage de $-\infty$

La droite D : $y = -x+1$ est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$



1) En utilisant le graphique répondre aux questions les suivantes

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + 2x$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{f(x)-1}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} f\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[f\left(\frac{1}{x}\right)-2\right]$ $\lim\limits_{x\to+\infty} fof(x)$; $fof(]-2\,,+\infty[)$

2) Soit g une fonction deux fois dérivable sur $[-2\,,+\infty[$ tel que $g(0) = \frac{1}{2}$ et dont la fonction dérivée a pour représentation graphique celle de f à l'intervalle $[-2\,,+\infty[$

a) Montrer que $\forall x \in [0\,,2]$ on a : $\left|g(x)-\frac{1}{2}\right| \leq 2|x|$

b) Montrer que la courbe de g admet un point d'inflexion dont on donnera les coordonnées

3) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0\,,+\infty[$ par $h(x) = \frac{2x^2}{1+x^2}$

a) Dresser le tableau de variation de h

b) Pour $n \in IN^*$ montrer que l'équation $h(x) = \frac{n}{n+1}$ admet une unique solution U_n dans $[0\,,+\infty[$

c) Vérifier que $U_n \in]0\,,1[$

d) Montrer que $U_n = \sqrt{\frac{n}{n+2}}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

4) a) Montrer que la fonction $f o\, hhh$ est dérivable sur $[0\,,+\infty[$

b) Dresser le tableau de variation de $f o\, hhh$ sur $[0\,,+\infty[$

Exercice 12

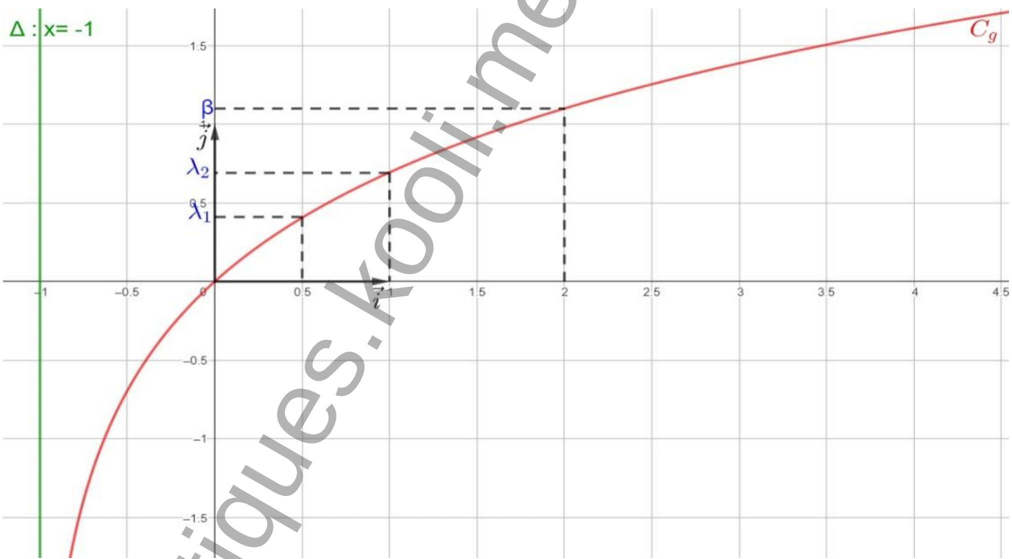
On donne ci-dessous la courbe C_g d'une fonction g dérivable sur $]-1\,,+\infty]$.

* La droite Δ: $x = -1$ est une asymptote à C_g.

* La courbe C_g admet une branche parabolique de direction celle de $(O\,,\vec{\imath})$ au voisinage de $+\infty$.

* La droite Δ': $y = x$ est tangente à C_g au point d'abscisse 0.

* On pose $g\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda_1$ et $g(1) = \lambda_2$ avec $\frac{1}{4} < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$



1) A partir du graphique déterminer $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ et $g'(0)$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0\,,+\infty]$ par $f(x) = g(\sqrt{x})$ et soit C_f sa courbe représentative.

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ interpréter graphiquement le résultat.

c) Sachant que $\forall x \in]-1\,,+\infty]$; $g'(x) = \frac{1}{x+1}$, montrer que f est dérivable sur $]0\,,+\infty]$ et que $\forall x \in]0\,,+\infty]$; $f'(x) = \frac{1}{2(x+\sqrt{x})}$

d) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que $\forall x \in \left[\frac{1}{4}\,,1\right]$ on a $f'(x) \leq \frac{2}{3}$

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\left[\frac{1}{4}\,,1\right]$ une unique solution α

c) Placer les points de C_f d'abscisses $\frac{1}{4}$; α ; 1 et 4. Tracer C_f (on prendra $\simeq 0,55$)

4) **Soit la suite (U_n) définie sur IN par par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$**

a) **Montrer que $\forall n \in IN\ ;\ \frac{1}{4} \leq U_n \leq 1$**

b) **Montrer que $\forall n \in IN\ ;\ |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$**

c) **En déduire par récurrence que $\forall n \in IN\ ;\ |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - \alpha|$**

d) **Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$**

Exercice 13

Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

1) **a)** **Etudier les variations de f sur $]1, +\infty[$**

b) **En déduire l'image de l'intervalle $]1, +\infty[$ par f.**

2) **Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = f\left(\frac{1}{\cos x}\right) & si\ \ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 & \end{cases}$**

Montrer que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a : $g(x) = \frac{1}{\sin x}$ et en déduire que g est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$

3) **Calculer $g'(x)$ de deux manières pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$**

4) **Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ une unique solution α et que $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$**

Exercice 14

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 2x + \frac{1-\cos(x^2)}{x} & \text{si}\ \ x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} & \text{si}\ \ x \geq 0 \end{cases}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) **a)** **Montrer que f est continue en 0.**

b) **Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.**

2) **a)** **Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x$.**

b) **Montrer que $\forall x \in]-\infty, 0[$ on a : $2 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 2 + \frac{2}{x^2}$**

c) **Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$**

3) **a)** **Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.**

b) **Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0.**

c) **Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.**

4) **Préciser le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$.**

5) **Soit la fonction g définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x) = \frac{1}{\sin x}$**

a) **Etudier les variations de g et en déduire $g\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.**

b) **Soit la fonction h définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $h(x) = f\left(\frac{1}{\sin x}\right)$**

c) **Montrer que h est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $h'(x) = -\frac{\cos x}{(\sin x)^2} \times f'\left(\frac{1}{\sin x}\right)$**

d) Préciser le sens de variation de h.

Exercice 15

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = 2x + \sqrt{1+4x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = 1 + x^2 \sin\frac{\pi}{2x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ f(x) = \frac{5}{3} + \frac{2x}{3\sqrt{x^2+3}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Montrer que f est continue en 0.

c) Montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$.

2) a) Montrer que f est continue en 1.

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1.

c) Justifier que f est dérivable sur $]0, 1[$ puis calculer $f'(x)$.

3) Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $g(x) = f(x) + 2$.

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[$ on a : $g'(x) \leq \frac{1}{4}$

c) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans $]4, 5[$ une unique solution α.

d) Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[$ on a $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$

Exercice 16

Soit la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en -1.

b) Montrer que $\forall x \in]-1, +\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{1}{4f(x)}$ et en déduire le sens de variation de f.

c) Montrer que $\forall x[0, 1]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

2) Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \leq U_n \leq 1$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|U_n - 1|$.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et en déduire la limite de suite U.

Exercice 17

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}} + 2$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Justifier que f est dérivable sur IR et calculer $f'(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Etudier la position de (C) par rapport à sa tangente T au point $A(0, 2)$.

d) Construire (C) et T.

2) a) Montrer que $\forall x \in \left[\sqrt{2}, +\infty\right[$ on a : $0 < f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$ une solution unique α .

3) Soit la suite (U_n) définie sur IN par $U_n = 2$ et $\forall n \in IN$; $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in IN$; on a : $U_n \geq 2$

b) Montrer que $\forall n \in IN$; on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}|U_n - \alpha|$

c) En déduire que $\forall n \in IN$; on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |2 - \alpha|$

d) Calculer alors la limite de suite U

Exercice 18

1) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on définie la fonction $f_k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$: $x \mapsto \frac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$

Démontrer que la fonction f_k est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

2) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\quad U_{n+1} = \frac{(U_n)^2}{\sqrt{(U_n)^2+1}}$

a) Montrer par récurrence que : la suite (U_n) est strictement décroissante.

b) Montrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $0 < U_n < 1$

3) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

4) a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_{n+1} < \frac{U_n}{\sqrt{2}}$

b) Retrouver alors la limite de la suite (U_n)

Exercice 19

Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1) Etudier les variations de f sur $]1, +\infty[$ et calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle $]1, +\infty[$

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1, +\infty[$

b) Montrer que $1 < \alpha < 2$

3) Soit la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Montrer que $g(\alpha) = \alpha$.

4) a) Déterminer l'image de l'intervalle $[1, +\infty[$ par la fonction g.

b) Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[$ on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c) En déduire que $\forall x \in [1, +\infty[$ on a : $|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

5) Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = g(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $1 \leq U_n \leq 2$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et en déduire la limite de suite U.