Dans tous les exercices le plan est orienté.

Exercice 1

Soit ABC un triangle isocèle et rectangle tel que $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit et soit O le milieu de $[AC]$.

On désigne par I le milieu de $[OB]$ et par D le symétrique de O par rapport à (BC).

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(O) = D$.

b) Montrer que f est une rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

c) Soit $E = f(I)$ .Montrer que E est le milieu de $[BD]$.

2) On pose $g = S_{(BO)}\ o\ S_{(AB)}\ o\ f^{-1}$.

a) Montrer que g est un déplacement.

b) Déterminer $g(B)$ et $g(C)$ et en déduire que $f^{-1} = S_{(AB)}\ o\ S_{(BO)}$.

3) On pose $h = S_{(OD)}\ o\ f^{-1}$. On désigne par Δ la médiatrice du segment $[BD]$.

a) Déterminer $h(B)$ et $h(D)$.

b) Montrer que $h = S_\Delta t_{\overrightarrow{BO}}$

4) Déterminer l'ensemble des ponts M du plans tel que : $f(M) = h^{-1}(M)$.

Exercice 2

Soit IAB un triangle équilatéral de sens direct et C le symétrique de A par rapport à I.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R_1 tel que $R_1(B) = I$ et $R_1(A) = C$.

b) Montrer que R_1 est une rotation dont on précisera l'angle.

c) On note O le centre de R_1. Construire O.

2) Soit $S = R_2\ o\ R_1$ où R_2 est la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

a) Montrer que S est la symétrie centrale de centre B.

b) La droite (AB) coupe la droite (OI) en K et J le point tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{KJ}$.

Placer les points J et K. Montrer que $B = A * K$ et que AOJ est un triangle équilatéral.

3) Soit f l'antidéplacement tel que : $f(A) = C$ et $f(B) = I$.

a) Montrer que f est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

b) Soit $L = S_{(BI)}(C)$. Montrer que $ABIL$ est un parallélogramme.

Exercice 3

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$. La médiatrice Δ de $[AB]$ coupe la droite (AC) en E, soit $F = S_\Delta(C)$ et $D = S_A(B)$.

1) a) Montrer que le triangle EBA est équilatéral.

b) Montrer que B est le milieu de $[EF]$.

c) Donner la nature du triangle BCF.

2) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R tel que $R(A) = F$ et $R(C) = B$.

b) Montrer que R est une rotation dont-on précisera l'angle.

c) Montrer que le centre Ω de R est le symétrique de A par rapport à (BC) et que $\Omega = C * F$.

3) Soit g l'antidéplacement définie par $g(A) = F$ et $g(D) = B$.

a) Montrer que g est une symétrie glissante.

b) Caractériser alors g et Construire le point $C' = g(C)$ en justifiant.

Exercice 4

Soit ABC un triangle équilatéral direct inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, on désigne par D le symétrique de A par rapport à O, les médiatrices des segments $[AD]$ et $[OB]$ se coupent en un point K.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui transforme A en D et O en B.

b) Caractériser le déplacement R.

2) Soit f l'antidéplacement qui transforme A en D et O en B.

a) Montrer que f est une symétrie glissante.

b) Soit $g = t_{\overrightarrow{OB}}\ o\ S_{(OB)}$, déterminer $g(A)$ et $g(O)$. Caractériser alors f.

3) a) Déterminer $(f^{-1}\ o\ R)(O)$ et $(f^{-1}\ o\ R)(A)$.

b) Caractériser alors l'application $f^{-1}\ o\ R$.

c) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que $f(M) = R(M)$.

Exercice 5

On considère un triangle ABC tel que $AB = AC$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Soit I, J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ *et* $[AB]$.

On appelle R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

On pose $f = R\ o\ T$ et $g = T\ o\ R$.

1) a) Déterminer l'image de K par f et l'image de J par g.

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f et de g.

2) a) Déterminer la nature de $g\ o\ f^{-1}$.

b) Déterminer l'image de A par $g\ o\ f^{-1}$ et caractériser alors $g\ o\ f^{-1}$.

c) Soit M un point du plan, n'appartenant pas à la droite (IJ) , M_1 est l'image de M par f et M_2 est l'image de M par g.

Montrer que le quadrilatère ACM_2M_1 est un parallélogramme.

Exercice 6

Soit ABC un triangle tel que $AB = AC$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$. Soit D le point du plan tel que :

$CA = CD$ et $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

1) Soit R_A la rotation de centre A et transformant B en C et R_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

On pose $f = R_C\ o\ R_A$

a) Déterminer $f(A)$ et $f(B)$.

b) Démontrer que f est une rotation du plan dont on précisera son angle. Construire son centre O.

c) Montrer que le quadrilatère $ABOC$ est un losange.

2) a) Soit l'application : $g = f \, o \, S_{(BC)}$. Déterminer (A) , $g(B)$ et $g(O)$

b) Montrer que g est une symétrie glissante.

3) On désigne par H le milieu du segment $[BC]$, on pose $C' = g(C)$ et $H' = g(H)$.

a) Montrer que H' est le milieu du segment $[OD]$.

b) Déterminer et construire le point C'.

c) Trouver la forme réduite de g.

Exercice 7

On considère un triangle IJK tel que $IJ = IK$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par O, E et F les milieux respectifs des segments $[JK]$, $[IJ]$ et $[IK]$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui transforme K en I et I en J. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de R.

b) On désigne par $S_{(OI)}$ et $S_{(IJ)}$ les symétries orthogonales d'axes respectifs (OI) et (IJ) Montrer que : $S_{(OI)} \, o \, S_{(IJ)}$ est une rotation R' dont on déterminera le centre et l'angle.

c) Montrer que $R \, o \, R'$ est une symétrie centrale dont on déterminera le centre.

2) Soit g l'antidéplacement du plan qui transforme K en I et I en J.

a) Montrer que g n'est pas une symétrie orthogonale.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

c) Soit $S_{(IK)}$ la symétrie orthogonale d'axe (IK). Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $h = S_{(IK)} \, o \, R \, o \, R'$.

3) On désigne par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ les cercles de rayon IJ et de centre respectifs J et K, à tout point M de $\mathcal{C}$ on associe le point M' de $\mathcal{C}_1$ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{KM'}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

a) Montrer que M' est l'image de M par la rotation R_1 de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$

b) Soit R_2 la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Caractériser l'application : $R_2 \, o \, R_1$

c) Soit $M'' = S_O(M)$. Montrer que le triangle $KM'M''$ est rectangle et isocèle.

Exercice 8

Soit IOA un triangle équilatéral direct ; B est le symètrique de A par rapport à la droite (OI), J est le milieu du segment $[AO]$ et K le milieu du segment $[OB]$.

1) a) Montrer que le triangle IBO est équilatéral direct.

b) Soit R la rotation du plan qui transforme A en O et O en B. Déterminer son centre et son angle.

2) Soit ζ le cercle de centre O et passant par le point A ; M un point du de ζ et $M' = R(M)$.

a) Montrer que lorsque M décrit le cercle ζ le point M' décrit un cercle ζ' que l'on déterminera.

b) Comparer les mesures des angles orientés : $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BM'})$.

c) On désigne par Ω le deuxième point d'intersection des cercles ζ et ζ' autre que I.
Montrer que ; lorsque $M \neq \Omega$ et $M' \neq \Omega$; les points Ω, M et M' sont alignés.

3) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en O et O en B.

b) Montrer que f est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques.

c) Vérifier que $f = R \circ S_{(OA)}$

d) Déterminer l'ensemble $\mathfrak{E}$ des points N du plan tels que $R(N) = f(N)$.

Exercice 9

Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre O. On désigne par I le milieu du segment $[AB]$ et par J le milieu du segment $[AC]$. Soit R la rotation du plan qui transforme I en J et B en C.

1) a) Montrer que $R(A) = A$ et caractériser la rotation R.

b) Déterminer les images par la rotation R des droites (AB) et (OC).

d) Déduire de ce qui précède une construction du point C'.

e) Montrer que C' est le symétrique du point B par rapport à la droite (AC).

f) Caractériser l'isométrie $S_{(AC)}\ o\ S_{(AO)}$.

2) Soit R' la rotation du plan de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et D le symétrique de C par rapport à la droite (AB). On pose $h = R\ o\ R'$.

a) Déterminer $h(B)$ et $(h\ o\ h)(D)$.

b) Caractériser l'isométrie h et déduire que : $\overrightarrow{DC'} = 2\overrightarrow{BC}$.

3) Soit l'isométrie : $g = S_{(AC)}\ o\ S_{(BC)}\ o\ S_{(AB)}$.

a) Déterminer $g(B)$ et $g(D)$.

b) Montrer que g est une symétrie glissante

c) La droite (IJ) coupe (DB) en E et (CC') en F. montrer que : $E = B * D$ et $F = C * C'$.

d) Déterminer les éléments caractéristiques de g et sa forme réduite.

Exercice 10

Soit $ABCD$ est un carré de centre O et tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par I , J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(C) = J$ et $f(J) = O$

b) Déterminer l'angle de f et en déduire que f est une rotation dont-on déterminera le centre Ω

2) a) Déterminer $f(O)$ et $f(K)$ et en déduire que $f(I) = D$.

b) Déterminer la nature du triangle ΩID.

3) On pose $g = t_{\overrightarrow{CJ}}\ o\ f$; $h = S_{(BD)}\ o\ g$ et $\varphi = h\ o\ S_{(AB)}$.

a) Déterminer $g(O)$ puis caractériser g et en déduire l'image du carré $ABCD$ par g.

b) Déterminer $h(O)$ et $h(J)$ puis caractériser h et φ.

4) On pose $D' = S_C(D)$ et $A' = S_D(A)$; les médiatrices de $[AD']$ et $[DC]$ se coupent en point I'. Soit la R rotation qui transforme A en D' et D en C

a) Caractériser R

b) Déterminer $R(A')$

c) On pose $g' = R \; o \; S_{(AD)}$. Montrer que g' est une symétrie glissante que l'on caractérisa.

Exercice 11

1) Soit dans $\mathbb{C}$, $P(z) = z^3 - 4iz^2 + (-5 + 6i)z + 18 + 6i$.

a) Vérifier que $3i$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2) Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = i\bar{z} - 2 - 2i$. Montrer que l'application g est une isométrie.

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points : $z_A = 3i$, $z_B = -2 + 2i$ et $z_C = 2 - i$

a) Déterminer les affixes des points $'$, B' et C' images respectifs des points A, B et C par g.

b) Comparer les angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$.

c) En déduire que l'isométrie g est un antidéplacement.

3) a) Montrer que l'écriture complexe associée à l'application $g \; o \; g$ est $z'' = z - 4 - 4i$.

b) Caractériser alors g.

Exercice 12

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O et tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

1) On désigne par R_A, R_B et R_C les rotations de centres respectifs A, B et C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application : $f = R_A \; o \; R_B$ (On pourra déterminer les images de B et C par).

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application : $g = R_C \; o \; R_B \; o \; R_A$.

2) On désigne par : B' et A' les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BC]$.

Soit l'application : $h = S_{(CA)} \; o \; S_{(AB)} \; o \; S_{(BC)}$ où $S_{(CA)}$, $S_{(AB)}$ et $S_{(BC)}$ sont des symétries orthogonales d'axes respectifs (CA), (AB) et (BC).

a) Justifier que h est un antidéplacement.

b) Soit D' la droite parallèle à (AC) et passant par B et soit $S_{D'}$ la symétrie orthogonale d'axe D'. Montrer que : $S_{(AB)} \; o \; S_{(BC)} = S_{D'} o \; S_{(AB)}$.

c) En déduire que : $h = t_{2\overrightarrow{BH}} \; o \; t_{2\overrightarrow{HB'}} \; o \; S_{(AB)}$ où H est le projeté orthogonal de B' sur (AB) et $t_{2\overrightarrow{BH}}$ et $t_{2\overrightarrow{HB'}}$ sont les translations de vecteurs respectifs $2\overrightarrow{BH}$ et $2\overrightarrow{HB'}$.

d) En déduire la forme réduite de h.

Exercice 13

Soit $ABCD$ est un rectangle de centre O tel que $AB = 2BC$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(I) = J$.

b) Caractériser f.

2) Soit $g = R_{(I, \frac{\pi}{2})} \, o \, f$

a) Montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle.

b) Déterminer $g(A)$.

c) Déduire la construction du point Ω centre de g.

3) Soit h l'antidéplacement qui transforme en A en C et I en J.

a) Montrer que h est une symétrie glissante.

b) Montrer que $h(B) = D$.

4) a) On pose $h(D) = D'$. Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD'}}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $AD = CD'$.

b) En déduire que D' est le symétrique de B par rapport à C.

c) En déduire la forme réduite de h. Construire le point $C' = h(C)$.

e) Le cercle de diamètre $[AB]$ recoupe $[AC]$ en E, le cercle de diamètre $[CD]$ recoupe $[CC']$ en E'.

Soit F le symétrique de E' par rapport à (IJ). Montrer que $h(E) = E'$ et que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{IJ}$.

__Exercice 14__

Soit ABC un triangle rectangle non isocèle tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

A tout point M de la droite (AB), distinct de B on associe le point N de la droite (AC) tel que $BM = CN$ et M et N se trouvent dans un même demi-plan de frontière (BC).

1) Montrer qu'il existe une rotation R tel que $R(B) = C$ et $R(M) = N$, préciser une mesure de son angle et construire son centre Ω.

2) Soit O le milieu de $[BC]$ et $S_{(O\Omega)}$ la symétrie axiale d'axe $(O\Omega)$. On pose $f = S_{(O\Omega)} \, o \, R$.

a) Déterminer $f(B)$ et $f(\Omega)$.

b) En déduire la nature de f et la caractériser.

3) Soit Δ la médiatrice de $[\Omega C]$ et $g = t_{\overrightarrow{BC}} \, o \, f$, où $t_{\overrightarrow{BC}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. En utilisant une décomposition convenable de $t_{\overrightarrow{BC}}$ trouver la nature de g et les éléments qui la caractérisent.

__Exercice 15__

Soit $ABCD$ un losange de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Soient $F = S_C(A)$ et E, G, H et I les milieux respectifs de $[BF]$, $[CD]$, $[AD]$ et $[AB]$

1) Montrer qu'il existe un unique déplacement R tel que $R(A) = C$ et $R(B) = F$.

2) Montrer que R est une rotation puis donner ses éléments caractéristiques.

3) On donne $R_1 = R_{(B, \frac{\pi}{3})}$, $R_2 = R_{(F, \frac{\pi}{3})}$ $T = t_{\overrightarrow{BF}}$ et $f = R_2 \, o \, T \, o \, R_1$

a) Déterminer $f(B)$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

4) a) Soit $g = t_{\overrightarrow{AB}}\ o\ S_C$. Déterminer $g(F)$ puis donner la nature et les éléments caractéristiques de g.

b) Pour tout $M \in P$ on pose $M' = t_{\overrightarrow{AB}}(M)$ et $M'' = S_C(M)$ Montrer que $E = M' * M''$

5) Soit φ l'antidéplacement qui transforme B en A et A en C.

a) Montrer que φ est une symétrie glissante puis déterminer ses éléments caractéristiques.

b) Montrer que $\varphi(C) = D$.

c) On donne $J = \varphi(D)$. Montrer que J et B sont symétriques pat rapport au point C.

Exercice 16

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Soient $D = R(C)$ et $E = R^{-1}(B)$. On désigne par I le milieu du segment $[CD]$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = D$ et $f(C) = A$.

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

2) Soit $g = f\ o\ R$.

a) Montrer que g est une translation.

b) Soit $F = g(E)$. Montrer que $f(B) = F$ et en déduire la nature du triangle BIF.

c) Montrer que les points C, A et F sont alignés.

3) Soit $G = t_{\overrightarrow{AD}}(I)$ où $t_{\overrightarrow{AD}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement φ tel que $\varphi(C) = D$ et $\varphi(I) = G$

b) Montrer que φ est une symétrie glissante dont on précisera le vecteur et l'axe.

Exercice 17

Soit $ABDC$ un rectangle direct de centre O tel que $AC = 2AB$. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[AC]$; $[AI]$ et $[BD]$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui envoie A en I et B en C puis vérifier que f est une symétrie glissante.

b) Déterminer l'image du triangle ABI par f. En déduire que $f(I) = K$.

c) Déterminer la forme réduite de f.

d) Soit $H = f(O)$. Montrer que IJKH est un parallélogramme.

2) Soit $g = f\ o\ S_{(AB)}$.

a) Déterminer $g(A)$ et $g(B)$.

b) Montrer que g est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Construire son centre G.

c) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Justifier que $g = t_{\overrightarrow{AI}}\ o\ R$.

3) Soit E l'image du point I par R et soit le point F tel que $AEFI$ soit un carré.

a) Caractériser $g\ o\ g$.

b) Déterminer $g\ o\ g(A)$ et en déduire que G est le centre du $AEFI$.

Exercice 18

On donne le point A d'affixe 1. Soit l'application f de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}z + 1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

1) **Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.**
2) **Soit le point M_0 d'affixe 2. On pose pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$.**

On désigne par z_n l'affixe du point M_n et par Z_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM_n}$

a) **Montrer que $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$**

b) **Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$**

c) **En déduire l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles les points A, M_0 et M_n sont alignés.**

Exercice 19

Soit AGB un triangle direct, $ABCD$ et $AEFG$ deux carrés directs de centre respectifs O et O' : I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$; $ADKE$ est parallélogramme.

1) a) **Faire une figure**

b) **Montrer qu'il existe un unique déplacement φ et un unique antidéplacement Ψ qui transforment A en B et B en C.**

c) **Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de Ψ.**

d) **Montrer que Ψ n'est pas une symétrie orthogonale en déduire la forme réduite de Ψ.**

2) **On définie : $R = R_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$; $T = t_{\overrightarrow{OD}}$; $f = R \circ T$ et $g = T \circ R$.**

a) **Déterminer $f(I)$, en déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.**

b) **Déterminer la droite Δ tel que $T = S_{\Delta'} o S_{\Delta}$ avec Δ' la médiatrice de $[OD]$.**

c) **Déduire une décomposition de R puis la nature et les éléments caractéristiques de g.**

d) **Sans passer par les décompositions de T et de R déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g**

3) a) **Déterminer $R^{-1}_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)} \, o \, R^{-1}_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)}(A)$ puis caractériser l'application $R^{-1}_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)} \, o \, R^{-1}_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)}$.**

b) **Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $h = S_{(OJ)} o R^{-1}_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)} \, o \, R^{-1}_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)}$.**

4) a) **Montrer qu'il existe une unique isométrie σ qui transforme le triangle AGB en DKA.**

b) **Montrer que σ est une rotation à déterminer.**

c) **En déduire que $(AK) \perp (BG)$ et que $AK = BG$.**

d) **Prouver que $(CG) \perp (BK)$.**

5) **En utilisant la rotation $R' = R_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$ montrer que $(FB) \perp (GK)$.**
6) **En déduire que (AK) , (CG) et (BF) sont concourantes.**

Exercice 20

On considère un triangle équilatéral OAB tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On désigne par $\mathfrak{C}$ le cercle de centre O et passant par A et par C le symétrique de B par rapport à O. La médiatrice du segment $[AC]$ coupe le cercle $\mathfrak{C}$ en I et J ; J étant le point situé sur l'arc BC qui contient le point A.

1) a) Montrer que $ABIO$ est un losange.

b) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme A en C et B en O.

c) Justifier que f est une rotation d'angle : $-\frac{\pi}{3}$.

d) Montrer que I est le centre de f.

2) a) On pose $f(C) = C'$. Justifier que : $\left(\widehat{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CO'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]$.

b) En déduire que la droite (CC') est la tangente à $\mathfrak{C}$ en C.

c) Montrer Que les points O, A et C' sont alignés.

3) Soit l'application : $g = f \circ S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$.

a) Justifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JC}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

b) Caractériser l'application : $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$.

c) Déterminer $g(A)$; caractériser l'application g.

d) Pour tout point M du plan distinct des points I et J on pose $M' = f(M)$ et $M'' = g(M)$.

Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{MM''},\overrightarrow{MM'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{MJ},\overrightarrow{MI}}\right) + \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

En déduire l'ensemble des points M tel que : M, M' et M'' soient alignés.

4) a) Caractériser l'application : $S_{(BC)} \circ S_{(AJ)}$.

b) Caractériser l'application : $h = S_{(BC)} \circ S_{(AJ)} \circ S_{(AI)}$.

Exercice 21

Soit $ABCD$ est un losange de centre O, I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f que transforme A en B et B en D.

b) Caractériser f.

c) Déterminer l'image du triangle ABD.

2) Soit S un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A, B, D\}$ en l'ensemble $\{B, C, D\}$ et tel que $S(A) = C$.

a) Déterminer l'image du segment $[BD]$ par S.

b) En déduire que S est la symétrie axiale d'axe (BD).

3) Soit g un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A, B, D\}$ en l'ensemble $\{B, C, D\}$ et tel que $g(A) = D$.

a) Montrer que $g(D) = B$ et caractériser g.

Exercice 22

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ soit $O = B * C$.

1) Montrer que le triangle OCA est équilatéral.

2) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme O en A et B en C.

b) Montrer que f est une rotation. Construire son centre I.

c) En calculant $\left(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IO}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IA}}\right)$, montrer que I appartient au segment $[AB]$.

c) Calculer le rapport $\frac{IA}{IB}$, en déduire que I est le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 1)$.

3) Soit r la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f\ o\ r$.

b) Soit C' l'image de C par f, montrer que les points O, I et C' sont alignés.

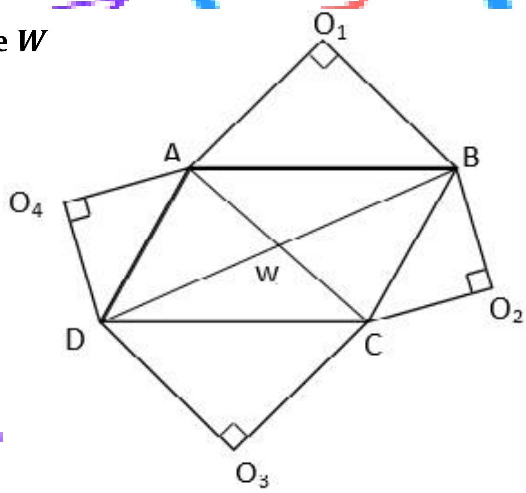
4) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui envoie O sur A et B sur C.

b) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

c) Montrer que $g(C) = C'$.

5) Soit $h = t_{\overrightarrow{BC}}\ o\ S_{(AB)}$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de h.

__Exercice 23__



Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un parallélogramme de centre W

et les triangles O_1 , BCO_2 , CDO_3 et DAO_4

Sont des triangles isocèles rectangles de sommets

principaux respectifs O_1 , O_2 , O_3 et O_4

On suppose que $\left(\widehat{\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1B}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On désigne par R_1, R_2 , R_3 et R_4 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$

et de centre respectifs O_1 , O_2 , O_3 et O_4

1) a) Déterminer $(R_2\ o\ R_1)(A)$, $(R_3\ o\ R_2)(B)$ et $(R_4\ o\ R_3)(C)$

b) Montrer que les applications $(R_2\ o\ R_1)$, $(R_3\ o\ R_2)$ et $(R_4\ o\ R_3)$sont toutes les trois égales à une même application que l'on déterminera et que l'on désigne par f.

2) a) Montrer que $R_3(R_2(O_1)) = R_2(O_1)$ et déterminer $f(O_1)$.

b) Montrer que $f(O_2) = O_4$

c) Quelle est la nature du quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$

3) Soit D la médiatrice du segment $[AB]$ et S_D la symétrie orthogonale d'axe D. On pose $g = R_2\ o\ S_D$

a) Déterminer $g(A)$ et $g(O_1)$.

b) Montrer que g n'est pas une symétrie axiale et en déduire la nature de g.

c) Construire le point $W' = g(W)$.Déterminer les éléments caractéristiques de g.

__Exercice 24__

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A et tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit I, J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement φ qui envoie A en B et C en A.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristique de φ.

2) Soit T la translation de vecteur $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. On pose $f = \varphi \; o \; T$ et $g = T \; o \; \varphi$.

a) Déterminer $f(K)$ et $g(J)$.

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f et g.

3) a) quelle est la nature de l'application $g \; o \; f^{-1}$.

b) Déterminer l'image de A par $g \; o \; f^{-1}$. Caractériser alors cette application

c) Déterminer les droites Δ et Δ' telles que : $f = S_{\Delta} \; o \; S_{(JK)}$ et $g = S_{\Delta'} \; o \; S_{(JK)}$

puis retrouver l'application $g \; o \; f^{-1}$.

4) Soit M un point du plan. On pose $M_1 = f(M)$ et $M_2 = g(M)$

a) Montrer que M_1 et M_2 sont distincts.

b) Montrer que M_2 et l'image de M_1 par un déplacement fixe que l'on déterminera.

c) Montrer que A, M_1 et C sont alignés si et seulement si $M \in (IJ)$.

5) On suppose que $M \notin (IJ)$.

a) Quelle est la nature du quadrilatère ACM_2M_1 ?

b) Montrer que ACM_2M_1 est un losange si et seulement si M appartient à un cercle fixe que l'on déterminera.

c) Montrer que ACM_2M_1 est un rectangle si et seulement si M appartient à une droite fixe.