

Dans tous les exercices le plan est orienté.

Exercice 1

Soit ABC un triangle isocèle et rectangle tel que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et soit O le milieu de $[AC]$.

On désigne par I le milieu de $[OB]$ et par D le symétrique de O par rapport à (BC) .

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(O) = D$.

b) Montrer que f est une rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c) Soit $E = f(I)$. Montrer que E est le milieu de $[BD]$.

2) On pose $g = S_{(BO)} \circ S_{(AB)} \circ f^{-1}$.

a) Montrer que g est un déplacement.

b) Déterminer $g(B)$ et $g(C)$ et en déduire que $f^{-1} = S_{(AB)} \circ S_{(BO)}$.

3) On pose $h = S_{(OD)} \circ f^{-1}$. On désigne par Δ la médiatrice du segment $[BD]$.

a) Déterminer $h(B)$ et $h(D)$.

b) Montrer que $h = S_{\Delta} \circ t_{\overrightarrow{BO}}$.

4) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que : $f(M) = h^{-1}(M)$.

Exercice 2

Soit IAB un triangle équilatéral de sens direct et C le symétrique de A par rapport à I .

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R_1 tel que $R_1(B) = I$ et $R_1(A) = C$.

b) Montrer que R_1 est une rotation dont on précisera l'angle.

c) On note O le centre de R_1 . Construire O .

2) Soit $S = R_2 \circ R_1$ où R_2 est la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

a) Montrer que S est la symétrie centrale de centre B .

b) La droite (AB) coupe la droite (OI) en K et J le point tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{KJ}$.

Placer les points J et K . Montrer que $B = A * K$ et que AOJ est un triangle équilatéral.

3) Soit f l'antidéplacement tel que : $f(A) = C$ et $f(B) = I$.

a) Montrer que f est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

b) Soit $L = S_{(BI)}(C)$. Montrer que $ABIL$ est un parallélogramme.

Exercice 3

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$. La médiatrice Δ de $[AB]$ coupe la droite (AC) en E , soit $F = S_{\Delta}(C)$ et $D = S_A(B)$.

1) a) Montrer que le triangle EBA est équilatéral.

b) Montrer que B est le milieu de $[EF]$.

c) Donner la nature du triangle BCF .

2) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R tel que $R(A) = F$ et $R(C) = B$.

b) Montrer que R est une rotation dont-on précisera l'angle.

c) Montrer que le centre Ω de R est le symétrique de A par rapport à (BC) et que $\Omega = C * F$.

3) Soit g l'antidépacement définie par $g(A) = F$ et $g(D) = B$.

a) Montrer que g est une symétrie glissante.

b) Caractériser alors g et Construire le point $C' = g(C)$ en justifiant.

Exercice 4

Soit ABC un triangle équilatéral direct inscrit dans un cercle \mathcal{C} de centre O , on désigne par D le symétrique de A par rapport à O , les médiatrices des segments $[AD]$ et $[OB]$ se coupent en un point K .

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui transforme A en D et O en B .

b) Caractériser le déplacement R .

2) Soit f l'antidépacement qui transforme A en D et O en B .

a) Montrer que f est une symétrie glissante.

b) Soit $g = t_{\overline{OB}} \circ S_{(OB)}$, déterminer $g(A)$ et $g(O)$. Caractériser alors f .

3) a) Déterminer $(f^{-1} \circ R)(O)$ et $(f^{-1} \circ R)(A)$.

b) Caractériser alors l'application $f^{-1} \circ R$.

c) Déterminer l'ensemble \mathcal{X} des points M tels que $f(M) = R(M)$.

Exercice 5

Soit ABC un triangle tel que $AB = AC$ et $(\widehat{AB}, \widehat{AC}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$. Soit D le point du plan tel que :

$$CA = CD \text{ et } (\widehat{CA}, \widehat{CD}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

1) Soit R_A la rotation de centre A et transformant B en C et R_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

On pose $f = R_C \circ R_A$

a) Déterminer $f(A)$ et $f(B)$.

b) Démontrer que f est une rotation du plan dont on précisera son angle. Construire son centre O .

c) Montrer que le quadrilatère $ABOC$ est un losange.

2) a) Soit l'application : $g = f \circ S_{(BC)}$. Déterminer $g(A)$, $g(B)$ et $g(O)$

b) Montrer que g est une symétrie glissante.

3) On désigne par H le milieu du segment $[BC]$, on pose $C' = g(C)$ et $H' = g(H)$.

a) Montrer que H' est le milieu du segment $[OD]$.

b) Déterminer et construire le point C' .

c) Trouver la forme réduite de g .

Exercice 6

On considère un triangle IJK tel que $IJ = IK$ et $(\widehat{IJ}, \widehat{IK}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On désigne par O , E et F les milieux respectifs des segments $[JK]$, $[IJ]$ et $[IK]$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui transforme K en I et I en J .

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de R .

b) On désigne par $S_{(OI)}$ et $S_{(IJ)}$ les symétries orthogonales d'axes respectifs (OI) et (IJ)

Montrer que : $S_{(OI)} \circ S_{(IJ)}$ est une rotation R' dont on déterminera le centre et l'angle.

c) Montrer que $R \circ R'$ est une symétrie centrale dont on déterminera le centre.

2) Soit g l'antidépacement du plan qui transforme K en I et I en J .

a) Montrer que g n'est pas une symétrie orthogonale.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g .

c) Soit $S_{(IK)}$ la symétrie orthogonale d'axe (IK) . Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $h = S_{(IK)} \circ R \circ R'$.

3) On désigne par \mathcal{C} et \mathcal{C}_1 les cercles de rayon IJ et de centre respectifs J et K , à tout point M de \mathcal{C} on

associe le point M' de \mathcal{C}_1 tel que $(\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{KM'}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

a) Montrer que M' est l'image de M par la rotation R_1 de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$

b) Soit R_2 la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Caractériser l'application : $R_2 \circ R_1$

c) Soit $M'' = S_O(M)$. Montrer que le triangle $KM'M''$ est rectangle et isocèle.

Exercice 7

Soit IOA un triangle équilatéral direct ; B est le symétrique de A par rapport à la droite (OI) , J est le milieu du segment $[AO]$ et K le milieu du segment $[OB]$.

1) a) Montrer que le triangle IBO est équilatéral direct.

b) Soit R la rotation du plan qui transforme A en O et O en B . Déterminer son centre et son angle.

2) Soit ζ le cercle de centre O et passant par le point A ; M un point du de ζ et $M' = R(M)$.

a) Montrer que lorsque M décrit le cercle ζ le point M' décrit un cercle ζ' que l'on déterminera.

b) Comparer les mesures des angles orientés : $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BM'})$.

c) On désigne par Ω le deuxième point d'intersection des cercles ζ et ζ' autre que I .

Montrer que ; lorsque $M \neq \Omega$ et $M' \neq \Omega$; les points Ω, M et M' sont alignés.

3) a) Montrer qu'il existe un unique antidépacement f qui transforme A en O et O en B .

b) Montrer que f est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques.

c) Vérifier que $f = R \circ S_{(OA)}$

d) Déterminer l'ensemble \mathcal{X} des points N du plan tels que $R(N) = f(N)$.

Exercice 8

Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre O . On désigne par I le milieu du segment $[AB]$ et par J le milieu du segment $[AC]$. Soit R la rotation du plan qui transforme I en J et B en C .

1) a) Montrer que $R(A) = A$ et caractériser la rotation R .

b) Déterminer les images par la rotation R des droites (AB) et (OC) .

d) Déduire de ce qui précède une construction du point C' .

e) Montrer que C' est le symétrique du point B par rapport à la droite (AC) .

f) Caractériser l'isométrie $S_{(AC)} \circ S_{(AO)}$.

2) Soit R' la rotation du plan de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et D le symétrique de C par rapport à la droite (AB) . On pose $h = R \circ R'$.

a) Déterminer $h(B)$ et $(h \circ h)(D)$.

b) Caractériser l'isométrie h et déduire que : $\overrightarrow{DC'} = 2\overrightarrow{BC}$.

3) Soit l'isométrie : $g = S_{(AC)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(AB)}$.

a) Déterminer $g(B)$ et $g(D)$.

b) Montrer que g est une symétrie glissante

c) La droite (IJ) coupe (DB) en E et (CC') en F . montrer que : $E = B * D$ et $F = C * C'$.

d) Déterminer les éléments caractéristiques de g et sa forme réduite.

Exercice 9

Soit $ABCD$ est un carré de centre O et tel que $(\widehat{AB}, \widehat{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB], [BC]$ et $[CD]$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(C) = J$ et $f(J) = O$

b) Déterminer l'angle de f et en déduire que f est une rotation dont-on déterminera le centre Ω

2) a) Déterminer $f(O)$ et $f(K)$ et en déduire que $f(I) = D$.

b) Déterminer la nature du triangle ΩID .

3) On pose $g = t_{\overrightarrow{CJ}} \circ f$; $h = S_{(BD)} \circ g$ et $\varphi = h \circ S_{(AB)}$.

a) Déterminer $g(O)$ puis caractériser g et en déduire l'image du carré $ABCD$ par g .

b) Déterminer $h(O)$ et $h(J)$ puis caractériser h et φ .

4) On pose $D' = S_C(D)$ et $A' = S_D(A)$; les médiatrices de $[AD']$ et $[DC]$ se coupent en point I' . Soit la R rotation qui transforme A en D' et D en C

a) Caractériser R

b) Déterminer $R(A')$

c) On pose $g' = R \circ S_{(AD)}$. Montrer que g' est une symétrie glissante que l'on caractérisa.

Exercice 10

1) Soit dans \mathbb{C} , $P(z) = z^3 - 4iz^2 + (-5 + 6i)z + 18 + 6i$.

a) Vérifier que $3i$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$.

b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$.

2) Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que :

$z' = i\bar{z} - 2 - 2i$. Montrer que l'application g est une isométrie.

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on donne les points :

$z_A = 3i, z_B = -2 + 2i$ et $z_C = 2 - i$

a) Déterminer les affixes des points AA', B' et C' images respectifs des points A, B et C par g .

b) Comparer les angles orientés $(\widehat{AB}, \widehat{AC})$ et $(\widehat{A'B'}, \widehat{A'C'})$.

c) En déduire que l'isométrie g est un antidéplacement.

3) a) Montrer que l'écriture complexe associée à l'application $g \circ g$ est $z'' = z - 4 - 4i$.

b) Caractériser alors g .

Exercice 11

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O et tel que $(\widehat{AB}, \widehat{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

1) On désigne par R_A, R_B et R_C les rotations de centres respectifs A, B et C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application : $f = R_A \circ R_B$ (On pourra déterminer les images de B et C par f).

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application : $g = R_C \circ R_B \circ R_A$.

2) On désigne par B' et A' les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BC]$.

Soit l'application : $h = S_{(CA)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BC)}$ où $S_{(CA)}, S_{(AB)}$ et $S_{(BC)}$ sont des symétries orthogonales d'axes respectifs $(CA), (AB)$ et (BC) .

a) Justifier que h est un antidéplacement.

b) Soit D' la droite parallèle à (AC) et passant par B et soit $S_{D'}$ la symétrie orthogonale d'axe D' .

Montrer que : $S_{(AB)} \circ S_{(BC)} = S_{D'} \circ S_{(AB)}$.

c) En déduire que : $h = t_{2\overline{BH}} \circ t_{2\overline{HB'}} \circ S_{(AB)}$ où H est le projeté orthogonal de B' sur (AB) et $t_{2\overline{BH}}$ et $t_{2\overline{HB'}}$ sont les translations de vecteurs respectifs $2\overline{BH}$ et $2\overline{HB'}$.

d) En déduire la forme réduite de h .

Exercice 12

Soit $ABCD$ est un rectangle de centre O tel que $AB = 2BC$ et $(\widehat{AB}, \widehat{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(I) = J$.

b) Caractériser f .

2) Soit $g = R_{(I, \frac{\pi}{2})} \circ f$

a) Montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle.

b) Déterminer $g(A)$.

c) Déduire la construction du point Ω centre de g .

3) Soit h l'antidéplacement qui transforme en A en C et I en J .

a) Montrer que h est une symétrie glissante.

b) Montrer que $h(B) = D$.

4) a) On pose $h(D) = D'$. Montrer que $(\widehat{CD}, \widehat{CD'}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $AD = CD'$.

b) En déduire que D' est le symétrique de B par rapport à C .

c) En déduire la forme réduite de h . Construire le point $C' = h(C)$.

e) Le cercle de diamètre $[AB]$ recoupe $[AC]$ en E , le cercle de diamètre $[CD]$ recoupe $[CC']$ en E' .

Soit F le symétrique de E' par rapport à (IJ) . Montrer que $h(E) = E'$ et que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{IJ}$.

Exercice 13

Soit ABC un triangle rectangle non isocèle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

A tout point M de la droite (AB) , distinct de B on associe le point N de la droite (AC) tel que $BM = CN$ et M et N se trouvent dans un même demi-plan de frontière (BC) .

1) Montrer qu'il existe une rotation R tel que $R(B) = C$ et $R(M) = N$, préciser une mesure de son angle et construire son centre Ω .

2) Soit O le milieu de $[BC]$ et $S_{(O\Omega)}$ la symétrie axiale d'axe $(O\Omega)$. On pose $f = S_{(O\Omega)} \circ R$.

a) Déterminer $f(B)$ et $f(\Omega)$.

b) En déduire la nature de f et la caractériser.

3) Soit Δ la médiatrice de $[OC]$ et $g = t_{\overrightarrow{BC}} \circ f$, où $t_{\overrightarrow{BC}}$ est la translation de vecteur \overrightarrow{BC} . En utilisant une décomposition convenable de $t_{\overrightarrow{BC}}$ trouver la nature de g et les éléments qui la caractérisent.

Exercice 14

Soit $ABCD$ un losange de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Soient $F = S_C(A)$ et E, G, H et I les milieux respectifs de $[BF]$, $[CD]$, $[AD]$ et $[AB]$

1) Montrer qu'il existe un unique déplacement R tel que $R(A) = C$ et $R(B) = F$.

2) Montrer que R est une rotation puis donner ses éléments caractéristiques.

3) On donne $R_1 = R_{(B, \frac{\pi}{3})}$, $R_2 = R_{(F, \frac{\pi}{3})}$, $T = t_{\overrightarrow{BF}}$ et $f = R_2 \circ T \circ R_1$

a) Déterminer $f(B)$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

4) a) Soit $g = t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_C$. Déterminer $g(F)$ puis donner la nature et les éléments caractéristiques de g .

b) Pour tout $M \in P$ on pose $M' = t_{\overrightarrow{AB}}(M)$ et $M'' = S_C(M)$ Montrer que $E = M' * M''$

5) Soit φ l'antidéplacement qui transforme B en A et A en C .

a) Montrer que φ est une symétrie glissante puis déterminer ses éléments caractéristiques.

b) Montrer que $\varphi(C) = D$.

c) On donne $J = \varphi(D)$. Montrer que J et B sont symétriques par rapport au point C .

Exercice 15

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Soient $D = R(C)$ et $E = R^{-1}(B)$. On désigne par I le milieu du segment $[CD]$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = D$ et $f(C) = A$.

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f .

2) Soit $g = f \circ R$.

a) Montrer que g est une translation.

b) Soit $F = g(E)$. Montrer que $f(B) = F$ et en déduire la nature du triangle BIF .

c) Montrer que les points C, A et F sont alignés.

3) Soit $G = t_{\overline{AD}}(I)$ où $t_{\overline{AD}}$ désigne la translation de vecteur \overline{AD} .

- Montrer qu'il existe un unique antidéplacement φ tel que $\varphi(C) = D$ et $\varphi(I) = G$
- Montrer que φ est une symétrie glissante dont on précisera le vecteur et l'axe.

Exercice 16

Soit $ABDC$ un rectangle direct de centre O tel que $AC = 2AB$. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[AC]$; $[AI]$ et $[BD]$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui envoie A en I et B en C puis vérifier que f est une symétrie glissante.

b) Déterminer l'image du triangle ABI par f . En déduire que $f(I) = K$.

c) Déterminer la forme réduite de f .

d) Soit $H = f(O)$. Montrer que $IJKH$ est un parallélogramme.

2) Soit $g = f \circ S_{(AB)}$.

a) Déterminer $g(A)$ et $g(B)$.

b) Montrer que g est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Construire son centre G .

c) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Justifier que $g = t_{\overline{AI}} \circ R$.

3) Soit E l'image du point I par R et soit le point F tel que $AEFI$ soit un carré.

a) Caractériser $g \circ g$.

b) Déterminer $g \circ g(A)$ et en déduire que G est le centre du $AEFI$.

Exercice 17

On donne le point A d'affixe 1. Soit l'application f de \mathcal{P} dans \mathcal{P} qui à tout point M d'affixe z associe le

point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}z + 1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

1) Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

2) Soit le point M_0 d'affixe 2. On pose pour tout entier naturel n , $M_{n+1} = f(M_n)$.

On désigne par z_n l'affixe du point M_n et par Z_n l'affixe du vecteur $\overline{AM_n}$

a) Montrer que $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$

c) En déduire l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles les points A, M_0 et M_n sont alignés.

Exercice 18

Soit AGB un triangle direct, $ABCD$ et $AEFG$ deux carrés directs de centre respectifs O et O' ; I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$; $ADKE$ est parallélogramme.

1) a) Faire une figure

b) Montrer qu'il existe un unique déplacement φ et un unique antidéplacement Ψ qui transforment A en B et B en C .

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de Ψ .

d) Montrer que Ψ n'est pas une symétrie orthogonale en déduire la forme réduite de Ψ .

2) On définit : $R = R_{(O, \frac{\pi}{2})}$; $T = t_{\overline{OD}}$; $f = R \circ T$ et $g = T \circ R$.

- Déterminer $f(I)$, en déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .
 - Déterminer la droite Δ tel que $T = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ avec Δ' la médiatrice de $[OD]$.
 - Déduire une décomposition de R puis la nature et les éléments caractéristiques de g .
 - Sans passer par les décompositions de T et de R déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g .
- 3) a) Déterminer $R_{(I, \frac{\pi}{2})}^{-1} \circ R_{(I, \frac{\pi}{2})}^{-1}(A)$ puis caractériser l'application $R_{(I, \frac{\pi}{2})}^{-1} \circ R_{(I, \frac{\pi}{2})}^{-1}$.
- b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $h = S_{(O)} \circ R_{(I, \frac{\pi}{2})}^{-1} \circ R_{(I, \frac{\pi}{2})}^{-1}$.
- 4) a) Montrer qu'il existe une unique isométrie σ qui transforme le triangle AGB en DKA .
- b) Montrer que σ est une rotation à déterminer.
- c) En déduire que $(AK) \perp (BG)$ et que $AK = BG$.
- d) Prouver que $(CG) \perp (BK)$.
- 5) En utilisant la rotation $R' = R_{(O, \frac{\pi}{2})}$ montrer que $(FB) \perp (GK)$.
- 6) En déduire que (AK) , (CG) et (BF) sont concourantes.

Exercice 19

On considère un triangle équilatéral OAB tel que $(\widehat{BO}, \widehat{BA}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On désigne par \mathcal{C} le cercle de centre O et passant par A et par C le symétrique de B par rapport à O . La médiatrice du segment $[AC]$ coupe le cercle \mathcal{C} en I et J ; J étant le point situé sur l'arc BC qui contient le point A .

- Montrer que $ABIO$ est un losange.
 - Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme A en C et B en O .
 - Justifier que f est une rotation d'angle : $-\frac{\pi}{3}$.
 - Montrer que I est le centre de f .
- On pose $f(C) = C'$. Justifier que : $(\widehat{CO}, \widehat{CO'}) \equiv (\widehat{AB}, \widehat{AC}) [2\pi]$.
 - En déduire que la droite (CC') est la tangente à \mathcal{C} en C .
 - Montrer que les points O , A et C' sont alignés.
- Soit l'application : $g = f \circ S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$.
 - Justifier que $(\widehat{JA}, \widehat{JC}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.
 - Caractériser l'application : $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$.
 - Déterminer $g(A)$; caractériser l'application g .
 - Pour tout point M du plan distinct des points I et J on pose $M' = f(M)$ et $M'' = g(M)$.
Montrer que $(\widehat{MM''}, \widehat{MM'}) \equiv (\widehat{MJ}, \widehat{MI}) + \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

En déduire l'ensemble des points M tel que : M , M' et M'' soient alignés.

4) a) Caractériser l'application : $S_{(BC)} \circ S_{(AJ)}$.

b) Caractériser l'application : $h = S_{(BC)} \circ S_{(AJ)} \circ S_{(AI)}$.

Exercice 20

Soit $ABCD$ est un losange de centre O , I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$ et

$$(\widehat{AB}, \widehat{AD}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi].$$

1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f que transforme A en B et B en D .

b) Caractériser f .

c) Déterminer l'image du triangle ABD .

2) Soit S un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A, B, D\}$ en l'ensemble $\{B, C, D\}$ et tel que $S(A) = C$.

a) Déterminer l'image du segment $[BD]$ par S .

b) En déduire que S est la symétrie axiale d'axe (BD) .

3) Soit g un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A, B, D\}$ en l'ensemble $\{B, C, D\}$ et tel que $g(A) = D$.

a) Montrer que $g(D) = B$ et caractériser g .

Exercice 21

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $(\widehat{CA}, \widehat{CB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ soit $O = B * C$.

1) Montrer que le triangle OCA est équilatéral.

2) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme O en A et B en C .

b) Montrer que f est une rotation. Construire son centre I .

c) En calculant $(\widehat{IB}, \widehat{IO})$ et $(\widehat{IO}, \widehat{IA})$, montrer que I appartient au segment $[AB]$.

c) Calculer le rapport $\frac{IA}{IB}$, en déduire que I est le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 1)$.

3) Soit r la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f \circ r$.

b) Soit C' l'image de C par f , montrer que les points O, I et C' sont alignés.

4) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui envoie O sur A et B sur C .

b) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

c) Montrer que $g(C) = C'$.

5) Soit $h = t_{\vec{BC}} \circ S_{(AB)}$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de h .

Exercice 22

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A et tel que $(\widehat{AB}, \widehat{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soit I, J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement φ qui envoie A en B et C en A .

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristique de φ .

2) Soit T la translation de vecteur $\vec{u} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. On pose $f = \varphi \circ T$ et $g = T \circ \varphi$.

a) Déterminer $f(K)$ et $g(J)$.

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f et g .

3) a) quelle est la nature de l'application $g \circ f^{-1}$.

b) Déterminer l'image de A par $g \circ f^{-1}$. Caractériser alors cette application

c) Déterminer les droites Δ et Δ' telles que : $f = S_{\Delta} \circ S_{(JK)}$ et $g = S_{\Delta'} \circ S_{(JK)}$

puis retrouver l'application $g \circ f^{-1}$.

4) Soit M un point du plan. On pose $M_1 = f(M)$ et $M_2 = g(M)$

a) Montrer que M_1 et M_2 sont distincts.

b) Montrer que M_2 et l'image de M_1 par un déplacement fixe que l'on déterminera.

c) Montrer que A, M_1 et C sont alignés si et seulement si $M \in (IJ)$.

5) On suppose que $M \notin (IJ)$.

a) Quelle est la nature du quadrilatère ACM_2M_1 ?

b) Montrer que ACM_2M_1 est un losange si et seulement si M appartient à un cercle fixe que l'on déterminera.

c) Montrer que ACM_2M_1 est un rectangle si et seulement si M appartient à une droite fixe.

Exercice 23

Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un parallélogramme de centre W

et les triangles O_1, BCO_2, CDO_3 et DAO_4

sont des triangles isocèles rectangles de sommets

principaux respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4

On suppose que $(\widehat{O_1A}, \widehat{O_1B}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

On désigne par R_1, R_2, R_3 et R_4 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$

et de centre respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4

1) a) Déterminer $(R_2 \circ R_1)(A)$, $(R_3 \circ R_2)(B)$ et $(R_4 \circ R_3)(C)$

b) Montrer que les applications $(R_2 \circ R_1)$, $(R_3 \circ R_2)$ et $(R_4 \circ R_3)$ sont toutes les trois égales à une même application que l'on déterminera et que l'on désigne par f .

2) a) Montrer que $R_3(R_2(O_1)) = R_2(O_1)$ et déterminer $f(O_1)$.

b) Montrer que $f(O_2) = O_4$

c) Quelle est la nature du quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$

3) Soit D la médiatrice du segment $[AB]$ et S_D la symétrie orthogonale d'axe D . On pose $g = R_2 \circ S_D$

a) Déterminer $g(A)$ et $g(O_1)$.

b) Montrer que g n'est pas une symétrie axiale et en déduire la nature de g .

c) Construire le point $W' = g(W)$. Déterminer les éléments caractéristiques de g .

